Spis treści

1. Liczby rzeczywiste

2. Język matematyki

3. Układy równań

4. Funkcje

5. Funkcja liniowa

6. Planimetria

7. Funkcja kwadratowa

Żółtym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

* Tematy obowiązujące w zakresie rozszerzonym oznaczono gwiazdką.

7. Zadania, których numery oznaczono kolorem niebieskim, nie należą do głównego toku lekcji, są mniej typowe lub trudniejsze.

D Oznaczenie zadań na dowodzenie.

Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.



1 Liczby rzeczywiste

Podstawowe dane statku pilotowego przedstawionego na zdjęciu: długość 15 m, szerokość 5 m, zanurzenie 2,3 m, prędkość maksymalna 10 węzłów.
Prędkość statków morskich podaje się w węzłach, czyli w milach morskich na godzinę. Jedna mila morska (Mm) to długość łuku południka wyznaczonego przez 1 minutę kątową (1/60 stopnia). Zatem:

$$1\ \text{Mm} = \frac{40\,000\ \text{km}}{360 \cdot 60} \approx 1{,}851852\ \text{km}$$

Otrzymany wynik zaokrągla się do pełnych metrów, czyli przyjmuje się, że 1 Mm = 1852 m.

Uczeń:
- podaje przykłady liczb pierwszych, liczb parzystych i nieparzystych,
- podaje dzielniki danej liczby naturalnej,
- przedstawia liczbę naturalną w postaci iloczynu liczb pierwszych,
- oblicza NWD i NWW dwóch liczb naturalnych,
- przeprowadza dowody twierdzeń dotyczących podzielności liczb.

Komentarz
Czasem przyjmuje się, że najmniejszą liczbą naturalną jest liczba 1. Warto zwrócić uwagę na to, że jest to kwestia umowy.

Ćwiczenie 1
a) 1, 2, 3, 4, 6, 12
b) 1, 2, 4, 7, 14, 28
c) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
d) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

Multiteka
- Dzielenie z resztą
- Spirala Ulama
- Algorytm Euklidesa
- Zbiory liczbowe
- Liczby na osi liczbowej

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.1

Generator testów i sprawdzianów

1.1. Liczby naturalne



Liczb naturalnych: $0, 1, 2, 3, \ldots$ jest nieskończenie wiele. Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n+1$ jest następna (większa o 1), i tak po milionie następuje milion jeden, potem milion dwa, milion trzy, a po trylionie (liczba zapisywana jako jedynka z 18 zerami) – trylion jeden itd.
Zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą **N**.

Definicja

Niech $m \neq 0$ i n będą liczbami naturalnymi. Liczbę m nazywamy **dzielnikiem** liczby n, gdy istnieje taka liczba naturalna k, że $n = m \cdot k$.

Jeśli liczba m jest dzielnikiem liczby n, to mówimy, że liczba n jest **podzielna** przez liczbę m lub że liczba n jest **wielokrotnością** liczby m.

Zauważ, że:
– liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej,
– liczba 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby,
– każda dodatnia liczba naturalna jest dzielnikiem liczby 0.

Przykład 1
Wymień dzielniki liczby 54.

Liczba 54 ma następujące dzielniki: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.

Ćwiczenie 1
Wymień dzielniki liczby:

a) 12, b) 28, c) 36, d) 48.

Podzielność liczb naturalnych zapisujemy w następujący sposób:
– zapis $3 \mid n$ czytamy: 3 dzieli n lub inaczej: liczba n jest podzielna przez 3,
– zapis $7 \nmid n$ czytamy: 7 nie dzieli n lub inaczej: liczba n nie jest podzielna przez 7.

Niech n będzie liczbą naturalną.
Jeśli $2 \mid n$, to liczbę n nazywamy **parzystą**.
Jeśli $2 \nmid n$, to liczbę n nazywamy **nieparzystą**.

Liczbę parzystą możemy zapisać w postaci $2k$, a liczbę nieparzystą – w postaci $2k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną.

Ćwiczenie 2

Czy prawdziwe jest stwierdzenie?

a) $3 \mid 323\,232$ b) $11 \mid 111$ c) $15 \nmid 2345$ d) $7 \nmid 4949$

Zamiast mówić, że liczba 3 jest dzielnikiem liczby 45, możemy powiedzieć, że liczba 45 dzieli się przez 3 **bez reszty**. $45 : 3 = 15$ reszta 0

Dzieląc 47 przez 3, otrzymujemy 15 i resztę 2. $47 : 3 = 15$ reszta 2
Oznacza to, że liczbę 47 można przedstawić w postaci: $47 = 3 \cdot 15 + 2$.

Ćwiczenie 3

Zapisz liczbę w postaci: $3k$, $3k + 1$ lub $3k + 2$, gdzie k jest liczbą naturalną.

a) 26   b) 76   c) 108   d) 127   e) 713

Ćwiczenie 4

Zapisz liczbę w postaci: $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ lub $4k + 3$, gdzie k jest liczbą naturalną.

a) 3   b) 49   c) 79   d) 126   e) 492

Definicja

Liczbę naturalną, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy **liczbą pierwszą**.

Liczbami pierwszymi są na przykład liczby 7 i 37.

Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy **liczbą złożoną**. Zwróć uwagę na to, że liczb 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do złożonych (jakie są dzielniki liczby 1, a jakie liczby 0?).

Grecki matematyk Euklides (żyjący na przełomie IV i III w. p.n.e.) udowodnił, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Liczby pierwsze między 100 a 1000:

101	179	263	353	443	547	641	739	839	947
103	181	269	359	449	557	643	743	853	953
107	191	271	367	457	563	647	751	857	967
109	193	277	373	461	569	653	757	859	971
113	197	281	379	463	571	659	761	863	977
127	199	283	383	467	577	661	769	877	983
131	211	293	389	479	587	673	773	881	991
137	223	307	397	487	593	677	787	883	997
139	227	311	401	491	599	683	797	887	
149	229	313	409	499	601	691	809	907	
151	233	317	419	503	607	701	811	911	
157	239	331	421	509	613	709	821	919	
163	241	337	431	521	617	719	823	929	
167	251	347	433	523	619	727	827	937	
173	257	349	439	541	631	733	829	941	

Ćwiczenie 5

Podaj wszystkie liczby pierwsze:

a) parzyste,
b) mniejsze od 20,
c) większe od 20 i mniejsze od 50,
d) większe od 50 i mniejsze od 100.

Ćwiczenie 2

a) Tak, suma cyfr tej liczby jest równa 15, więc jest ona podzielna przez 3.
b) Nie, $111 = 11 \cdot 10 + 1$.
c) Tak, liczba jest podzielna przez 5, ale suma cyfr tej liczby wynosi 14, więc liczba nie jest podzielna przez 3, a tym samym nie jest podzielna przez 15.
d) Nie, $4949 : 7 = 707$.

Komentarz

Cechy podzielności przez 2, 3, 5 i 9 przypomniane są na s. 14.

Ćwiczenie 3

a) $26 = 3 \cdot 8 + 2$
b) $76 = 3 \cdot 25 + 1$
c) $108 = 3 \cdot 36$
d) $127 = 3 \cdot 42 + 1$
e) $713 = 3 \cdot 237 + 2$

Ćwiczenie 4

a) $3 = 4 \cdot 0 + 3$
b) $49 = 4 \cdot 12 + 1$
c) $79 = 4 \cdot 19 + 3$
d) $126 = 4 \cdot 31 + 2$
e) $492 = 4 \cdot 123$

Między liczbami 1 i 100 jest 25 liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Komentarz

Warto zwrócić uwagę uczniów na to, że liczba 2 jest jedyną parzystą liczbą pierwszą.

Ćwiczenie 5

a) 2
b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
c) 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
d) 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Rozkład liczby naturalnej na czynniki jest przedstawieniem tej liczby w postaci iloczynu liczb naturalnych większych od 1. Na przykład liczbę 52 można rozłożyć na czynniki następująco:

$$52 = 2 \cdot 26, \quad 52 = 4 \cdot 13, \quad 52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$$

Ostatni z tych rozkładów jest **rozkładem na czynniki pierwsze**.

Twierdzenie

Każdą liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki będące liczbami pierwszymi. Istnieje dokładnie jeden taki rozkład (z dokładnością do kolejności czynników).

Rozkład na czynniki pierwsze liczby złożonej odbywa się zwykle w kilku krokach. Na przykład dla liczby 150 mamy:

$$150 = 3 \cdot 50 = 3 \cdot 2 \cdot 25 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Rozkład możemy też zapisać tak, jak podano obok.

150	3
50	2
25	5
5	5
1	

Ćwiczenie 6

Podaj rozkłady na czynniki pierwsze liczb: 99, 720, 770, 1024, 1323.

Ćwiczenie 6

$99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$

$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

$770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

$1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$1323 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$

Praktycznym zastosowaniem rozkładu na czynniki pierwsze jest wyznaczanie **najmniejszej wspólnej wielokrotności** dwóch liczb naturalnych – NWW oraz **największego wspólnego dzielnika** – NWD.

Przykład 2

Korzystając z podanych obok rozkładów na czynniki pierwsze liczb 120 i 54, otrzymujemy:

$\mathrm{NWW}(120, 54) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 1080$

$\mathrm{NWD}(120, 54) = 2 \cdot 3 = 6$

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Ćwiczenie 7

Oblicz $\mathrm{NWD}(x, y)$ oraz $\mathrm{NWW}(x, y)$.

a) $x = 18$, $y = 30$
b) $x = 15$, $y = 50$
c) $x = 24$, $y = 72$
d) $x = 144$, $y = 192$
e) $x = 84$, $y = 105$
f) $x = 196$, $y = 420$

Ćwiczenie 7

a) $\mathrm{NWD}(18, 30) = 6$, $\mathrm{NWW}(18, 30) = 90$
b) $\mathrm{NWD}(15, 50) = 5$, $\mathrm{NWW}(15, 50) = 150$
c) $\mathrm{NWD}(24, 72) = 24$, $\mathrm{NWW}(24, 72) = 72$
d) $\mathrm{NWD}(144, 192) = 48$, $\mathrm{NWW}(144, 192) = 576$
e) $\mathrm{NWD}(84, 105) = 21$, $\mathrm{NWW}(84, 105) = 420$
f) $\mathrm{NWD}(196, 420) = 28$, $\mathrm{NWW}(196, 420) = 2940$

Ćwiczenie 8

Ile wynosi $\mathrm{NWD}(x, y)$ i $\mathrm{NWW}(x, y)$, jeśli żaden czynnik występujący w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby naturalnej x nie występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby naturalnej y?

Ćwiczenie 8

$\mathrm{NWD}(x, y) = 1$, $\mathrm{NWW}(x, y) = x \cdot y$

Komentarz

Liczby, o których jest mowa w ćwiczeniu 8 nazywamy **liczbami względnie pierwszymi**.

Dla $x, y, a \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ zachodzą następujące własności:

1) $\mathrm{NWD}(x, y) = \mathrm{NWD}(y, x)$
2) $\mathrm{NWW}(x, y) = \mathrm{NWW}(y, x)$
3) $\mathrm{NWD}(a \cdot x, a \cdot y) = a \cdot \mathrm{NWD}(x, y)$
4) $\mathrm{NWD}(x, y) \cdot \mathrm{NWW}(x, y) = x \cdot y$

Zadania

1. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 201 i podzielnych przez:

a) 5, b) 8, c) 9, d) 11?

2. Przedstaw liczbę n w postaci $5k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, natomiast r jest jedną z liczb: 0, 1, 2, 3, 4.

a) $n = 39$ b) $n = 62$ c) $n = 156$ d) $n = 275$

3. Czy liczbę n można przedstawić w postaci $6k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, a r jest jedną z liczb: 1, 2, 3?

a) $n = 46$ b) $n = 74$ c) $n = 147$ d) $n = 276$

4. Podaj sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych, z których pierwszą jest:

a) $2n+1$, b) $2n-1$, c) $2n-5$, d) $4n+3$.

D **5.** Uzasadnij, że iloczyn:

a) trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6,

b) trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 48,

c) czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 24.

6. Oblicz wartość $\frac{NWW(x,y)}{NWD(x,y)}$, gdy:

a) $x = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$, $y = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^3$,

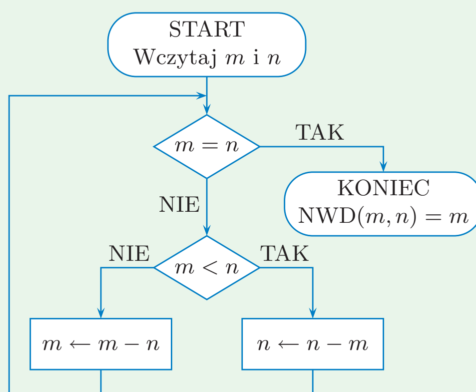
b) $x = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17$, $y = 2 \cdot 3^4 \cdot 17$,

c) $x = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, $y = 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3$,

d) $x = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$, $y = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Czy wiesz, że...

Największy wspólny dzielnik liczb naturalnych można obliczyć, korzystając z opisanego przez Euklidesa w „Elementach” algorytmu, który przedstawiono obok. Wykorzystuje on fakt, że dzielnik liczb naturalnych m i n jest również dzielnikiem różnicy tych liczb.



7. Korzystając z algorytmu Euklidesa, oblicz NWD liczb:

a) 48, 72, b) 360, 600, c) 253, 69.

Odpowiedzi do zadań

1. a) 41 **b)** 26 **c)** 23 **d)** 19

2. a) $5 \cdot 7 + 4$ **b)** $5 \cdot 12 + 2$ **c)** $5 \cdot 31 + 1$ **d)** $5 \cdot 55 + 0$

3. a) nie, $46 = 6 \cdot 7 + 4$
b) tak, $74 = 6 \cdot 12 + 2$
c) tak, $147 = 6 \cdot 24 + 3$
d) nie, $276 = 6 \cdot 46$

4. a) $6n + 9$ **b)** $6n + 3$ **c)** $6n - 9$ **d)** $12n + 15$

6. a) $\frac{2^3 \cdot 3^4 \cdot 7^3}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^3} = 2 \cdot 3 = 6$
b) $\frac{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 17}{2 \cdot 3^3 \cdot 17} = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$
c) $\frac{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3}{3^4 \cdot 5 \cdot 7} = 5 \cdot 7^2 = 245$
d) $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7}{3 \cdot 5^2} = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$

7. a) 24 **b)** 120 **c)** 23

5. a) Liczba jest podzielna przez 6, jeżeli jest podzielna jednocześnie przez 2 i 3. Wśród trzech kolejnych liczb naturalnych dokładnie jedna jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest podzielna przez 2. Zatem iloczyn tych liczb jest podzielny przez 6.

b) Rozważmy trzy kolejne liczby parzyste: $2n$, $2n+2$, $2n+4$, gdzie n jest liczbą naturalną. Wówczas:

$$2n(2n+2)(2n+4) = 8 \cdot n(n+1)(n+2)$$

Wyrażenie $n(n+1)(n+2)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych. Iloczyn ten jest podzielny przez 6 (co wykazaliśmy w punkcie a). Zatem liczba $2n(2n+2)(2n+4)$ jest podzielna przez $8 \cdot 6 = 48$, co było do uzasadnienia.

c) Wśród czterech kolejnych liczb naturalnych:

– co najmniej jedna jest podzielna przez 3,

– dokładnie dwie są parzyste, przy czym jedna z nich jest podzielna przez 4.

Zatem iloczyn tych liczb jest podzielny przez $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

Warto powtórzyć

Cechy podzielności liczb

Liczba naturalna jest podzielna przez:
- 2, gdy ostatnią jej cyfrą jest jedna z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8;
- 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3;
- 5, gdy ostatnią jej cyfrą jest 0 lub 5;
- 9, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

1. Przez które z liczb: 2, 3, 5, 9 jest podzielna liczba:
a) 653 925, b) 574 038, c) 946 030, d) 749 298?

2. Podaj cechy podzielności liczby naturalnej przez 4 oraz przez 8. Sprawdź, czy liczba x jest podzielna przez 4? Czy jest podzielna przez 8?
a) $x = 713\,592$ b) $x = 639\,044$ c) $x = 480\,658$ d) $x = 817\,296$

3. Przez którą z liczb: 6, 12, 15 jest podzielna liczba:
a) 775 584, b) 868 470, c) 894 665, d) 501 474?

4. Dana jest liczba siedmiocyfrowa $3\,150\,57a$, gdzie a oznacza cyfrę jedności. Wyznacz tę liczbę, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez:
a) 9, b) 6, c) 4, d) 8.

5. Nie wykonując dzielenia, podaj, które spośród liczb: 15, 45, 75, są dzielnikami danej liczby.
a) 1155 b) 9825 c) 5165 d) 8235

Czy wiesz, że...
Dana jest liczba naturalna x. Niech s_n oznacza sumę cyfr tej liczby znajdujących się w jej zapisie na miejscach nieparzystych, a s_p – na miejscach parzystych. Liczba x jest podzielna przez 11, gdy liczba $s_n - s_p$ jest podzielna przez 11. Na przykład dla liczby $x = 6\,291\,978$ mamy:
$$s_n = 6 + 9 + 9 + 8 = 32, \quad s_p = 2 + 1 + 7 = 10$$
Liczba $s_n - s_p = 22$ jest podzielna przez 11, więc liczba x też jest podzielna przez 11.

6. Sprawdź, czy liczba x jest podzielna przez 11. Skorzystaj z podanej cechy podzielności.
a) $x = 9\,191\,809$ b) $x = 13\,602\,479$ c) $x = 8\,354\,311$

Odpowiedzi do zadań

1. **a)** 3, 5 **b)** 2, 3, 9 **c)** 2, 5 **d)** 2, 3

2. Liczba naturalna jest podzielna przez 4, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4.
Liczba naturalna jest podzielna przez 8, gdy jej trzy ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 8.
a) 4 – tak, 8 – tak
b) 4 – tak, 8 – nie
c) 4 – nie, 8 – nie
d) 4 – tak, 8 – tak

3. Liczba naturalna jest podzielna przez 6, gdy jest podzielna przez 3 i 2, czyli gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3, a jej ostatnią cyfrą jest jedna z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8.
Liczba naturalna jest podzielna przez 12, gdy jest podzielna przez 3 i 4.
Liczba naturalna jest podzielna przez 15, gdy jest podzielna przez 3 i 5.
a) 6, 12 **b)** 6, 15
c) przez żadną **d)** 6

4. **a)** 3150576
b) 3150570 lub 3150576
c) 3150572 lub 3150576
d) 3150576

5. Liczba naturalna jest podzielna przez 45, gdy jest podzielna przez 5 i 9.
Liczba naturalna jest podzielna przez 75, gdy jest podzielna przez 3 i 25, czyli gdy suma cyfr jest podzielna przez 3, a jej ostatnimi cyframi są: 00 lub 25, lub 50, lub 75.
a) 15 **b)** 15, 75 **c)** żadna **d)** 15, 45

6. **a)** tak **b)** tak **c)** nie

1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne





Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: $1, 2, 3, 4, \ldots$, liczby do nich przeciwne: $-1, -2, -3, -4, \ldots$ oraz liczba 0. Zbiór wszystkich liczb całkowitych będziemy oznaczać literą **Z**.
Każda liczba całkowita jest albo parzysta, albo nieparzysta.

Zera oraz liczb ujemnych używano w Indiach w drugiej połowie I tysiąclecia n.e. W Europie przyjęły się dopiero kilkaset lat później. Współcześnie oś liczbową z zerem i liczbami ujemnymi widzimy w zwykłym termometrze, a reguły rachunkowe dotyczące liczb ujemnych są przedmiotem ćwiczeń w szkole podstawowej.

Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci. Wynik zapisz w zeszycie.

a) $42 - 78$
b) $-47 - (-63)$
c) $-240 \cdot (-3)$
d) $-342 + (-139)$
e) $7 \cdot (-4) - 2 \cdot (-3) \cdot (-5)$
f) $(-16) \cdot (-2) - (-54) : (-9)$

Działania występujące w powyższym ćwiczeniu: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie są zawsze wykonalne w zbiorze liczb całkowitych. Inaczej jest w przypadku dzielenia, gdyż same liczby całkowite już nie wystarczają, aby zapisać wynik. Np. po podzieleniu $(-3) : (-2) = \frac{3}{2}$ otrzymujemy ułamek.

Definicja

Liczby, które można zapisać jako iloraz $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi ($n \neq 0$), nazywamy **liczbami wymiernymi**.

Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą **Q**.
Zwróć uwagę, że każda liczba całkowita jest liczbą wymierną (dlaczego?).

Ułamki zazwyczaj przedstawiamy w możliwie najprostszej postaci, a więc w postaci **nieskracalnej**, np.:

$$\frac{180}{480} = \frac{18 \cdot \cancel{10}^{1}}{48 \cdot \cancel{10}_{1}} = \frac{18}{48} = \frac{3 \cdot \cancel{6}^{1}}{8 \cdot \cancel{6}_{1}} = \frac{3}{8}$$

Ułamek $\frac{3}{8}$ jest nieskracalny.

Po doprowadzeniu ułamka do postaci nieskracalnej licznik i mianownik to liczby **względnie pierwsze** (nie mają żadnych wspólnych dzielników całkowitych z wyjątkiem liczb 1 i −1).

Uwaga. Określenia **dzielnik** używamy również w odniesieniu do liczb całkowitych, np. liczba −6 ma następujące dzielniki: 1, −1, 2, −2, 3, −3, 6, −6.

Uczeń:
- rozpoznaje liczby całkowite i liczby wymierne wśród podanych liczb,
- podaje przykłady liczb całkowitych i wymiernych,
- odczytuje z osi liczbowej współrzędną danego punktu oraz zaznacza punkt o podanej współrzędnej na osi liczbowej,
- wykonuje działania na liczbach wymiernych.

Komentarz
Zgodnie z zaleceniem MEN liczby całkowite będziemy oznaczać literą **Z** (wcześniej **C**), a wymierne – **Q** (wcześniej **W**).

Ćwiczenie 1
a) −36 **b)** 16 **c)** 720
d) −481 **e)** −58 **f)** 26

Multiteka
- Zbiory liczbowe
- Liczby na osi liczbowej

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.2

Generator testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy ułamki x i y są równe.

a) $x = \frac{27}{72}$, $y = \frac{36}{96}$ b) $x = \frac{60}{108}$, $y = \frac{75}{135}$ c) $x = \frac{84}{156}$, $y = \frac{126}{246}$

Czasami trzeba ułamek **rozszerzyć**, na przykład wtedy, gdy chcemy dodać lub odjąć dwa ułamki o różnych mianownikach.

Ćwiczenie 3

Oblicz różnicę ułamków $\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$, biorąc jako wspólny mianownik:

a) iloczyn liczb 12 i 18, b) $\text{NWW}(12, 18)$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $1\frac{5}{12} - \frac{9}{8} - 2\frac{5}{6}$ c) $2\frac{2}{9} - 3\frac{5}{6} + 5\frac{1}{3}$

b) $6\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}$ d) $2\frac{2}{9} + 1\frac{5}{12} - \frac{7}{8}$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $-2\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{27}{28}\right)$ c) $-1\frac{1}{7} \cdot 1\frac{11}{24} : \frac{3}{5}$

b) $-3\frac{3}{8} : 5\frac{1}{16}$ d) $3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{6} : \left(-2\frac{1}{9}\right)$

Działania na liczbach wymiernych

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ $b \neq 0,\ d \neq 0$

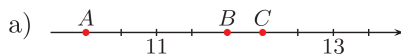
$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$ $b \neq 0,\ d \neq 0$

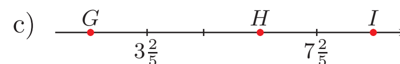
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $b \neq 0,\ d \neq 0$

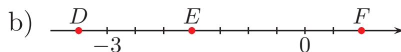
$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$

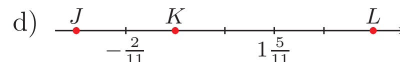
Zadania

1. Jakim liczbom odpowiadają punkty zaznaczone na osi?

a) 

c) 

b) 

d) 

2. Oblicz.

a) $1\frac{3}{5} - 2\frac{1}{6}$ d) $\frac{7}{6} + \left(-\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\right)$ g) $1\frac{5}{8} - \left(-2\frac{2}{3} + 0{,}25\right)$

b) $3\frac{3}{8} + 2\frac{5}{6}$ e) $-\left(-2\frac{2}{3}\right) + \frac{7}{15}$ h) $1\frac{2}{5} - 3\frac{7}{8} - 0{,}125$

c) $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)$ f) $-1\frac{9}{16} + \frac{11}{12}$ i) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$

3. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = 1\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$, $z = -\frac{3}{8}$.

a) $\frac{x - y}{y - z}$ b) $\frac{x + y - z}{y + z}$ c) $\frac{x - y + 2z}{x + y + 3z}$

Ćwiczenie 2

a) $x = y = \frac{3}{8}$

b) $x = y = \frac{5}{9}$

c) $x = \frac{21}{39}$, $y = \frac{21}{41}$, $x \neq y$

Ćwiczenie 3

a) $\frac{5}{12} - \frac{7}{18} = \frac{90}{12 \cdot 18} - \frac{84}{12 \cdot 18} = \frac{6}{12 \cdot 18} = \frac{1}{36}$

b) $\frac{5}{12} - \frac{7}{18} = \frac{15}{36} - \frac{14}{36} = \frac{1}{36}$

Ćwiczenie 4

a) $-2\frac{13}{24}$ **b)** $\frac{11}{12}$ **c)** $3\frac{13}{18}$ **d)** $2\frac{55}{72}$

Ćwiczenie 5

a) $2\frac{1}{4}$ **b)** $-\frac{2}{3}$ **c)** $-2\frac{7}{9}$ **d)** 5

Odpowiedzi do zadań

1. a) $A = 10\frac{1}{5}$, $B = 11\frac{4}{5}$, $C = 12\frac{1}{5}$

b) $D = -3\frac{3}{7}$, $E = -1\frac{5}{7}$, $F = \frac{6}{7}$

c) $G = 2\frac{1}{15}$, $H = 6\frac{1}{15}$, $I = 8\frac{11}{15}$

d) $J = -\frac{8}{11}$, $K = \frac{4}{11}$, $L = 2\frac{6}{11}$

2. a) $-\frac{17}{30}$ **b)** $6\frac{5}{24}$ **c)** 1

d) $-1\frac{5}{12}$ **e)** $3\frac{2}{15}$ **f)** $-\frac{31}{48}$

g) $4\frac{1}{24}$ **h)** $-2\frac{3}{5}$ **i)** $\frac{7}{60}$

3. a) 14 **b)** $-2\frac{3}{5}$ **c)** 8

4. Uporządkuj liczby: x, y, z w kolejności rosnącej.

a) $x = \frac{1 - 0{,}125 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{8} - \frac{8}{7}}$, $y = 2\frac{3}{5} \cdot 4\frac{6}{11} \cdot 3\frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$, $z = \frac{24}{11} \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}75 \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)$

b) $x = \frac{2\frac{3}{4} : \frac{1}{7} - 22}{6 - (-5)} + 1\frac{3}{4}$, $y = \frac{\frac{6}{11} - \frac{15}{45}}{\frac{11}{3} - 2\frac{1}{2}} \cdot 2\frac{3}{4}$, $z = 2 - \frac{8 - \frac{1}{2}}{12 + \frac{1}{2}}$

5. Oblicz.

a) $\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{2}} + \left(3\frac{2}{17} - 4\frac{6}{13}\right) \cdot \left(0{,}75 - \frac{3}{4}\right)$

b) $\frac{2}{3} - \left[0{,}8 \cdot \frac{3}{(-2)^2} - \frac{(-2)^2}{5}\right] : \left(-1\frac{1}{2}\right)$

c) $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{4}\right) - \left(0{,}25 - \frac{3}{8} : 0{,}625\right)$

d) $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right) : \left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right)$

e) $\frac{3}{5} - \left(1{,}4 \cdot \frac{5}{14} - \frac{0{,}9}{3^2}\right) : \left(-\frac{1}{5}\right)$

f) $\frac{5\frac{3}{4} - 8\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{2}{3} : \left(-\frac{4}{27}\right)$

g) $\frac{4}{5} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{2}{3} - \left(\frac{3}{8} - 1\frac{1}{3}\right)\right)$

h) $\left(\left(-1\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-1\frac{1}{3}\right)^2\right) : 4\frac{1}{4}$

D **6.** Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt o bokach długości x, y i z.

a) $x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)$, $y = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$, $z = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2$

b) $x = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}}$, $y = \frac{2\frac{1}{5} - \frac{1}{4}}{2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}$, $z = \frac{1\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}$

7. Ułamki postaci $\frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią, nazywamy **ułamkami egipskimi**. Przeczytaj informację obok i przedstaw ułamek jako sumę różnych ułamków egipskich.

a) $\frac{2}{11}$ b) $\frac{2}{17}$ c) $\frac{2}{31}$

Czy wiesz, że…
Każdy ułamek postaci $\frac{2}{n}$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, można przedstawić jako sumę:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

dla:

$$a = \frac{n+1}{2},\ b = \frac{n(n+1)}{2}$$

D **8.** Uzasadnij wzór $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, gdzie $n > 0$ jest liczbą naturalną, a następnie oblicz:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10}$$

9. Woda płynąca z kranów: A, B i C może napełnić basen w ciągu 6 godzin. Woda płynąca tylko z kranu A napełnia w ciągu godziny $\frac{1}{12}$ basenu, a tylko z kranu B – $\frac{1}{15}$ basenu. Ile czasu trwałoby napełnianie basenu wodą płynącą tylko z kranu C?

10. Woda płynąca z kranu A napełnia zbiornik w ciągu 6 godzin. By napełnić ten sam zbiornik wodą płynącą tylko z kranu B, potrzeba 9 godzin. Ile czasu zajmie napełnienie zbiornika, jeśli kran B odkręcono 4 godziny po odkręceniu kranu A?

4. a) $x = -3\frac{1}{2}$, $y = -10$, $z = -12$, zatem $z < y < x$
b) $x = 1\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 1\frac{2}{5}$, zatem $y < z < x$

5. a) $-8\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{8}{15}$ **c)** $-\frac{1}{20}$ **d)** $1\frac{1}{8}$
e) $2\frac{3}{5}$ **f)** -42 **g)** $1\frac{1}{24}$ **h)** $\frac{1}{9}$

6. Nierówność trójkąta: z trzech odcinków można zbudować trójkąt, jeżeli suma długości krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

a) $x = \frac{5}{24} = \frac{30}{144}$,
$y = \frac{5}{12} = \frac{60}{144}$,
$z = \frac{5}{144}$
$x + z = \frac{35}{144} < \frac{60}{144} = y$
Zatem nie istnieje trójkąt o bokach długości x, y i z.

b) $x = 2\frac{1}{2}$,
$y = \frac{13}{15} < 1$,
$z = \frac{22}{23} < 1$
$y + z < 2 < 2{,}5 = x$
Zatem nie istnieje trójkąt o bokach długości x, y i z.

7. a) $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$
b) $\frac{2}{17} = \frac{1}{9} + \frac{1}{153}$
c) $\frac{2}{31} = \frac{1}{16} + \frac{1}{496}$

8. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$, co było do uzasadnienia.

Suma:
$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

9. W ciągu godziny woda z kranu C napełnia:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{10}{60} - \frac{5}{60} - \frac{4}{60} = \frac{1}{60}$$

basenu. Zatem napełnienie basenu wodą płynącą tylko z kranu C trwałoby 60 godzin.

10. Kran A napełnia w ciągu jednej godziny $\frac{1}{6}$ zbiornika, czyli po 4 h będzie napełnione $\frac{2}{3}$ zbiornika. Do napełnienia pozostanie $\frac{1}{3}$ zbiornika.
W ciągu jednej godziny woda płynąca jednocześnie z kranów A i B napełni $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$ zbiornika.
$\frac{5}{18}x = \frac{1}{3}$, gdzie x – liczba godzin potrzebnych do napełnienia $\frac{1}{3}$ zbiornika.

$$x = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Napełnienie zbiornika zajmie $4 + 1{,}2 = 5{,}2$ [h], czyli 5 godzin 12 minut.

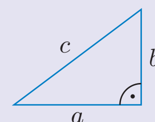
1.3. Liczby niewymierne

Uczeń:
- wskazuje liczby niewymierne wśród podanych liczb,
- konstruuje odcinki o długościach niewymiernych,
- zaznacza na osi liczbowej punkt odpowiadający liczbie niewymiernej,
- szacuje wartości liczb niewymiernych,
- wykazuje, dobierając odpowiednio przykłady, że suma, różnica, iloczyn oraz iloraz liczb niewymiernych nie muszą być liczbami niewymiernymi,
- dowodzi niewymierności liczb, np. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, oraz liczb będących iloczynem lub sumą liczby wymiernej i niewymiernej.

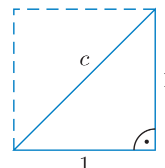
W VI wieku p.n.e. Grecy sformułowali twierdzenie znane obecnie jako **twierdzenie Pitagorasa**.

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Twierdzenie to miało istotny wpływ na rozwój pojęcia liczby. Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1.



Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa: $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, czyli $c = \sqrt{2}$ (przekątna kwadratu o boku 1 ma długość $\sqrt{2}$).

Można udowodnić, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną. Liczby, które nie są wymierne, nazywamy **liczbami niewymiernymi**.

Stwierdzenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, oznacza, że liczba ta nie jest równa żadnemu ułamkowi $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi oraz $n \neq 0$. Tam, gdzie jest to potrzebne, korzysta się z odpowiednio dokładnych przybliżeń. Na przykład $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623730950488$.

Innymi przykładami liczb niewymiernych są: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$.
Ogólnie, dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $\sqrt{n}$ jest albo liczbą naturalną (gdy jest kwadratem liczby naturalnej, np. $\sqrt{81} = 9$), albo liczbą niewymierną. Np. $\sqrt{82}$ nie jest liczbą naturalną, gdyż $9 = \sqrt{81} < \sqrt{82} < \sqrt{100} = 10$, jest więc liczbą niewymierną. Analogicznie jest dla pierwiastka sześciennego (np. $\sqrt[3]{8} = 2$, a $\sqrt[3]{9}$ jest liczbą niewymierną).

Ćwiczenie 1
Wśród poniższych liczb wskaż liczby niewymierne.
a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{44}$, $\sqrt{144}$ b) $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{27}$

Ćwiczenie 1
a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{44}$
b) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{25}$

W dowodzie niewymierności liczby $\sqrt{2}$ wykorzystamy następujący fakt: jeśli liczba 2 jest dzielnikiem liczby n, to w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n^2 występuje ona parzystą liczbę razy, np.:

$$18^2 = 18 \cdot 18 = (2 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3) = \underbrace{2 \cdot 2}_{\text{dwukrotnie}} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$56^2 = 56 \cdot 56 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{sześciokrotnie}} \cdot 7 \cdot 7$$

Multiteka
- Dowody twierdzenia Pitagorasa
- Zastosowania twierdzenia Pitagorasa
- Odległość do widnokręgu – zastosowanie twierdzenia Pitagorasa
- Obalenie twierdzenia przez podanie kontrprzykładu
- Zbiory liczbowe
- Liczby na osi liczbowej
- Spirala Teodorosa

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.3



Dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$

Przypuśćmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, czyli istnieje ułamek $\frac{m}{n}$ (gdzie m i n są liczbami całkowitymi, $n \neq 0$) taki, że:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \text{ czyli } 2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\text{wtedy } 2n^2 = m^2$$

Zauważmy, że ostatnia równość nie może zachodzić, gdyż oznaczałaby ona, że przy rozkładzie na czynniki pierwsze liczba 2 występuje parzystą liczbę razy po stronie prawej i nieparzystą liczbę razy po stronie lewej. Otrzymaliśmy sprzeczność, a więc przypuszczenie, że $\sqrt{2}$ można wyrazić jako ułamek $\frac{m}{n}$, było fałszywe (z prawdy nie może wynikać fałsz). Zatem $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

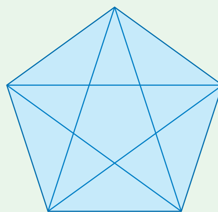
Dowód niewymierności $\sqrt{2}$ jest **dowodem przez sprowadzenie do sprzeczności** (*reductio ad absurdum*). Ten sposób rozumowania polega na wykazaniu, że przyjęcie prawdziwości jakiegoś zdania prowadzi do sprzeczności. Zatem musi być prawdziwe zdanie przeciwne.

Inne przykłady liczb niewymiernych otrzymamy, jeżeli zauważymy, że suma liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną. Podobnie iloczyn liczby wymiernej różnej od zera i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną. Dlatego na przykład liczby:

$3+\sqrt{7}, \quad \frac{1}{5}\sqrt{13}, \quad \frac{1}{2}-2\sqrt{17}, \quad 2\sqrt{3}-\frac{7}{3}$

są liczbami niewymiernymi.

Przekątna pięciokąta foremnego o boku długości 1 ma długość równą $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Jest to liczba niewymierna.



Ćwiczenie 2

Czy liczba x jest niewymierna?

a) $x = 3\sqrt{6} - \frac{1}{3}$ b) $x = \sqrt{16} + 2\sqrt{14}$ c) $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} - \sqrt{121}$

Ćwiczenie 3

Podaj przykład dwóch różnych liczb niewymiernych, których:

a) suma jest liczbą wymierną, b) iloczyn jest liczbą wymierną.

Uwaga. Oprócz liczb niewymiernych, które są pierwiastkami kwadratowymi lub sześciennymi, istnieją inne liczby niewymierne, np. znana z geometrii liczba π.

Ćwiczenie 2

a) jest
b) jest, $x = 4 + 2\sqrt{14}$
c) nie jest, $x = -10$

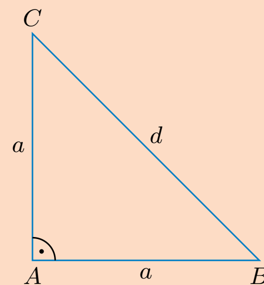
Ćwiczenie 3

a) np. $\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$
b) np. $\sqrt{3}$, $\sqrt{27}$

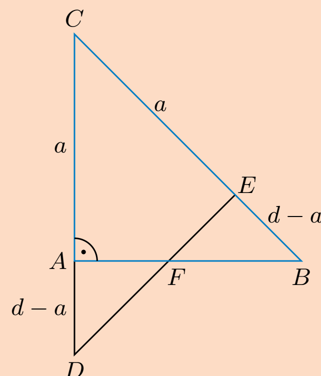
Niewymierność liczby $\sqrt{2}$ można udowodnić geometrycznie.

Przypuśćmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, czyli istnieją liczby $d, a \in \mathbf{N}$ takie, że $\frac{d}{a} = \sqrt{2}$ i są to najmniejsze liczby naturalne o tej własności (czyli ułamek $\frac{d}{a}$ jest nieskracalny).

Rozważmy prostokątny trójkąt równoramienny ABC o przyprostokątnych a i przeciwprostokątnej d.



Odcinek CA przedłużamy do odcinka CD o długości d. Wówczas $|AD| = d - a$.



Na przeciwprostokątnej zaznaczmy punkt E taki, że $|CE| = a$, czyli $|EB| = d - a$.

Punkt przecięcia odcinków AB i DE oznaczamy przez F. Zauważmy, że trójkąty DAF i FEB są równoramiennymi trójkątami prostokątnymi o przyprostokątnych $d - a$.

Z faktu, że $|AF| = d - a$ wynika, że:

$$|FB| = a - (d - a) = 2a - d$$

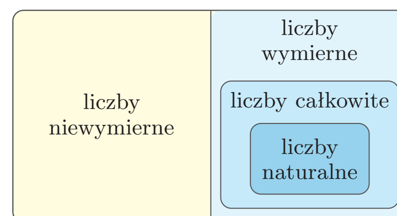
Trójkąty DAF i FEB są podobne do trójkąta ABC, czyli:

$$\sqrt{2} = \frac{d}{a} = \frac{2a-d}{d-a}$$

ale $2a - d < d$ oraz $d - a < a$, co przeczy założeniu, że liczby d i a są najmniejszymi liczbami naturalnymi spełniającymi warunek $\sqrt{2} = \frac{d}{a}$. Zatem $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych nazywamy zbiorem **liczb rzeczywistych** i oznaczamy literą **R**.

Uwaga. W dalszym ciągu, jeżeli nie napiszemy inaczej, przez „liczbę” rozumieć będziemy „liczbę rzeczywistą”.



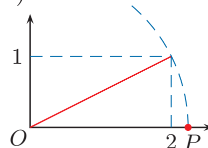
Zadania

1. Wśród poniższych trzech liczb wskaż liczbę niewymierną.

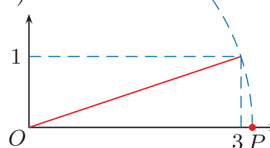
a) $\sqrt{4}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{164}$ b) $\sqrt{25}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{225}$ c) $\sqrt{169}$, $\sqrt{256}$, $\sqrt{286}$

2. Jakiej liczbie odpowiada punkt P zaznaczony na osi liczbowej? Czy jest to liczba wymierna?

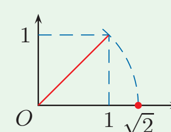
a)



b)



Konstrukcyjne wyznaczenie na osi liczbowej punktu odpowiadającego liczbie $\sqrt{2}$



3. Dany jest prostokąt o bokach x i y. Czy długość przekątnej tego prostokąta wyraża się liczbą wymierną?

a) $x = 2$, $y = 4$ c) $x = 6$, $y = 8$ e) $x = 5$, $y = 12$
b) $x = 3$, $y = 4$ d) $x = 8$, $y = 10$ f) $x = 7$, $y = 24$

4. Korzystając z podanych przybliżeń, sprawdź, czy nierówność jest prawdziwa (nie używaj kalkulatora).

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$ c) $2\sqrt{2} + \sqrt{5} > 5$ e) $4 - 2\sqrt{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\sqrt{5} + \sqrt{3} > 4$ d) $\sqrt{5} - \sqrt{3} < \frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2} < \sqrt{3}$

$\sqrt{2} \approx 1{,}414$
$\sqrt{3} \approx 1{,}732$
$\sqrt{5} \approx 2{,}236$

5. Podaj największą liczbę naturalną n taką, że ($\pi \approx 3{,}14$):

a) $n < 2\pi + 5$, b) $n < \pi^2 - 1$, c) $n^2 < 10\pi - 7$.

6. Dane są liczby niewymierne: p, q, r, s.

$p = 3 - 2\sqrt{3}$ $q = 2\sqrt{3}$ $r = 2\sqrt{3} - 7$ $s = 7\sqrt{3}$

Wybierz dwie spośród tych liczb tak, aby:

a) ich suma była liczbą wymierną, c) ich iloczyn był liczbą wymierną,
b) ich różnica była liczbą wymierną, d) ich iloraz był liczbą wymierną.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sqrt{164}$ **b)** $\sqrt{125}$ **c)** $\sqrt{286}$

2. a) $\sqrt{5}$, nie **b)** $\sqrt{10}$, nie

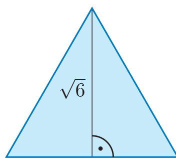
3. Niech d oznacza długość przekątnej.
a) $d = 2\sqrt{5}$, nie
b) $d = 5$, tak
c) $d = 10$, tak
d) $d = 2\sqrt{41}$, nie
e) $d = 13$, tak
f) $d = 25$, tak

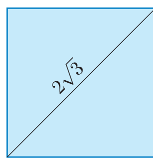
4. a), c), e) jest
b), d), f) nie jest

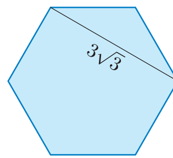
5. a) 11 **b)** 8 **c)** 4

6. a) p, q lub p, r
b) q, r
c) q, s **d)** q, s

7. Na rysunkach przedstawiono trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny. Obwód którego z tych wielokątów wyraża się liczbą wymierną?







D **8.** Przeprowadzając rozumowanie analogiczne do dowodu niewymierności liczby $\sqrt{2}$, udowodnij, że liczba x jest niewymierna.

a) $x = \sqrt{3}$ b) $x = \sqrt{5}$ c) $x = \sqrt{6}$

D **9.** Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Iloczyn dowolnej liczby niewymiernej x i liczby całkowitej $k \neq 0$ jest liczbą niewymierną.
>
> **Dowód.** Załóżmy – przeciwnie – że istnieją liczba niewymierna x oraz liczba całkowita $k \neq 0$ takie, że iloczyn $k \cdot x$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją liczby całkowite m i n $(n \neq 0)$ takie, że $k \cdot x = \frac{m}{n}$. Wówczas $x = \frac{m}{k \cdot n}$, z czego wynika, że x jest liczbą wymierną. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem iloczyn $k \cdot x$ jest liczbą niewymierną.

Udowodnij, że:

a) iloczyn dowolnej liczby niewymiernej x i liczby wymiernej $w \neq 0$ jest liczbą niewymierną,

b) suma dowolnej liczby niewymiernej x i liczby wymiernej w jest liczbą niewymierną.

10. Przeczytaj podane obok twierdzenie. Podaj przykład liczby niewymiernej x takiej, że:

> Między dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi na osi liczbowej znajdują się liczby niewymierne.

a) $1 < x < 2$, b) $0{,}01 < x < 0{,}02$, c) $5{,}001 < x < 5{,}002$.

D **11.** Uzasadnij, że jeśli przekątna sześcianu ma długość 3, to jego pole powierzchni wyraża się liczbą wymierną, a objętość – liczbą niewymierną.

D **12.** Uzasadnij, że wśród dzielników liczby 12 są takie liczby: a, b, c, że długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach długości: a, b, c, jest liczbą wymierną.

7. obwód trójkąta: $6\sqrt{2}$,
obwód kwadratu: $4\sqrt{6}$,
obwód sześciokąta: 18 – liczba wymierna.

9. a) Załóżmy – przeciwnie – że istnieją liczba niewymierna x oraz liczba wymierna:
$w = \frac{a}{b} \neq 0$ $(a, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\})$
takie, że iloczyn $w \cdot x$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją liczby całkowite m i n takie, że:
$$w \cdot x = \frac{m}{n},\ n \neq 0$$
Wówczas:
$$x = \frac{m \cdot b}{n \cdot a}$$
skąd wynika, że x jest liczbą wymierną. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem iloczyn $w \cdot x$ jest liczbą niewymierną.

b) Załóżmy – przeciwnie – że istnieją liczba niewymierna x oraz liczba wymierna:
$w = \frac{a}{b} \neq 0$ $(a, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\})$
takie, że suma $w + x$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją liczby całkowite m i n takie, że:
$$w + x = \frac{m}{n},\ n \neq 0$$
Wówczas:
$$x = \frac{m}{n} - \frac{a}{b} = \frac{mb - na}{nb}$$
skąd wynika, że x jest liczbą wymierną. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem suma $w + x$ jest liczbą niewymierną.

10. a) np. $\sqrt{2}$ **b)** np. $0{,}01\sqrt{2}$
c) np. $5 + 0{,}001\sqrt{2}$

11. Niech a będzie krawędzią sześcianu. Wówczas przekątna sześcianu ma długość $a\sqrt{3} = 3$, skąd $a = \sqrt{3}$.
Obliczamy pole powierzchni i objętość sześcianu:
$P_c = 6a^2 = 18$ – jest to liczba wymierna,
$V = a^3 = 3\sqrt{3}$ – jest to liczba niewymierna.

12. Przekątna prostopadłościanu o krawędziach: a, b, c ma długość $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
Dzielniki liczby 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Niech $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$, wówczas $d = \sqrt{49} = 7$ – jest to liczba wymierna.
Inne trójki liczb, dla których d jest liczbą wymierną to: 3, 4, 12 oraz 4, 6, 12.

Uczeń:
- wskazuje liczby wymierne oraz niewymierne wśród liczb podanych w postaci dziesiętnej,
- wyznacza rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych,
- wyznacza n-tą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego okresowego danej liczby,
- zamienia skończone rozwinięcia dziesiętne na ułamki zwykłe,
- przedstawia ułamki dziesiętne okresowe w postaci ułamków zwykłych,
- zaokrągla liczbę z podaną dokładnością,
- oblicza błąd przybliżenia danej liczby.

Komentarz

Warto zwrócić uczniom uwagę na to, że liczbę w postaci dziesiętnej okresowej można zapisać na kilka sposobów, np.:

$$1{,}393939\ldots = 1{,}(39) = \\ = 1{,}3(93) = \\ = 1{,}(3939)$$

Jednak zwykle taką liczbę zapisujemy z jak najkrótszym okresem.

Ćwiczenie 1

a) 0,35 **b)** 0,44 **c)** 2,08
d) 2,86 **e)** 0,032 **f)** 0,068

1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

Ułamki o mianownikach: 10, 100, 1000, ... (czyli mianownikach będących potęgami liczby 10) nazywamy **ułamkami dziesiętnymi**. Mogą one być zapisane na dwa sposoby: $\frac{15}{100} = 0{,}15$; $\frac{37}{1000} = 0{,}037$; $5\frac{7}{10} = 5{,}7$.

Zapis po prawej stronie nazywamy **postacią dziesiętną** lub **rozwinięciem dziesiętnym** liczby. Aby uzyskać postać dziesiętną liczby wymiernej, wykonujemy dzielenie. Na przykład dla liczby $\frac{13}{4}$ otrzymamy:

$$\frac{13}{4} = 13 : 4 = 3{,}25$$

Takie rozwinięcie liczby nazywamy skończonym.

Dla liczby $\frac{1}{6}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{1}{6} = 0{,}166666666\ldots$$

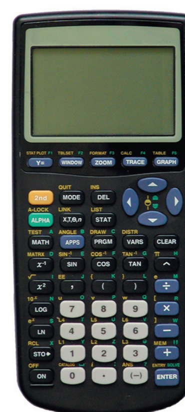
Takie rozwinięcie zapisujemy w następujący sposób:

$$\frac{1}{6} = 0{,}1(6)$$

Dla liczby $\frac{4}{7}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{4}{7} = 0{,}571428\,571428\,571428\ldots$$

co zapiszemy $\frac{4}{7} = 0{,}(571428)$.



Przy obliczeniach na liczbach podanych w postaci dziesiętnej wygodnie jest korzystać z kalkulatora.

W rozwinięciu dziesiętnym nawias oznacza powtarzanie się nieskończenie wiele razy zapisanej w nim grupy cyfr. Taką powtarzającą się grupę cyfr nazywamy **okresem**. Liczbę cyfr występujących w okresie nazywamy **długością okresu**.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{7}{20}$ c) $\frac{52}{25}$ e) $\frac{4}{125}$

b) $\frac{11}{25}$ d) $\frac{143}{50}$ f) $\frac{17}{250}$

> Przedstaw liczbę $\frac{6}{25}$ w postaci dziesiętnej.
>
> $$\frac{6}{25} = \frac{6}{25} \cdot \frac{4}{4} = \frac{24}{100} = 0{,}24$$

Ćwiczenie 2

Jaka cyfra znajduje się na dziesiątym, a jaka na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby?

a) 0,(1234) b) 5,(732) c) 2,6(435) d) 0,32(1410)

Ćwiczenie 2

a) dziesiąte miejsce: 2, dwudzieste miejsce: 4
b) dziesiąte miejsce: 7, dwudzieste miejsce: 3
c) dziesiąte miejsce: 5, dwudzieste miejsce: 4
d) dziesiąte miejsce: 0, dwudzieste miejsce: 4

Multiteka
- Liczba π

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

Generator testów i sprawdzianów

W tabeli poniżej podano długości okresów rozwinięć dziesiętnych nieskracalnego ułamka $\frac{m}{n}$ dla wybranych wartości n.

n	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
długość okresu	6	2	6	16	18	22	28	15	3	5

D **Ćwiczenie 3**

Uzasadnij, że jeśli ułamek $\frac{m}{n}$, gdzie m, n są naturalne oraz $n \neq 0$, ma rozwinięcie okresowe, to długość okresu jest mniejsza od n.

Wskazówka. Liczba różnych reszt przy dzieleniu liczby m przez liczbę n jest mniejsza od n.

Twierdzenie

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci dziesiętnej skończonej lub okresowej.
Każde rozwinięcie dziesiętne okresowe przedstawia liczbę wymierną.

Uwaga. Rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe przedstawiają liczby niewymierne, np. 0,101001000100001...

Ćwiczenie 4

Które z podanych niżej liczb mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe?

a) $\sqrt{8}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{16}{9}}$

b) $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$

W 2002 roku Yasumasa Kanada wyznaczył za pomocą komputera liczbę π z dokładnością do ponad biliona cyfr po przecinku. W praktyce wystarczają znacznie mniej dokładne przybliżenia.

3,14159265358979323846264338327950288419
7169399375105820974944592307816406286208
9986280348253421170679821480865132823066
4709384460955058223172535940812848111745
0284102701938521105559644622948954930381
9644288109756659334461284756482337867831
6527120190914564856692346034861045432664
8213393607260249141273724587006606315588

Reguła zaokrąglania

Do przybliżenia liczby w postaci dziesiętnej zwykle stosujemy **regułę zaokrąglania**, która polega na odrzuceniu końcowych cyfr tej liczby i zastąpieniu ich zerami:

– gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest: 0, 1, 2, 3, 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy bez zmian;
– gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest: 5, 6, 7, 8, 9, to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o jeden.

Ćwiczenie 3

Aby znaleźć rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{m}{n}$, dzielimy pisemnie liczbę m przez n. Podczas wyznaczania kolejnych cyfr okresu otrzymujemy reszty mniejsze od n, czyli może ich być maksymalnie $n-1$. Wiemy, że ułamek $\frac{m}{n}$ jest okresowy, więc pojawienie się którejś z reszt ponownie pociągnie za sobą powtórzenie się okresu. Zatem długość okresu jest mniejsza od n.

Ćwiczenie 4

a) $\sqrt{8}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$

b) $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{16}$

Ćwiczenie 5

Zaokrąglij do liczby całkowitej.

a) 20,9813 b) 19,901 c) 0,401 d) 1,099 e) 2,49957

Gdy przybliżenie liczby jest od niej mniejsze, to mówimy o przybliżeniu z **niedomiarem**. Natomiast gdy przybliżenie liczby jest od niej większe, to mówimy o przybliżeniu z **nadmiarem**.

Ćwiczenie 6

Podaj przybliżoną wartość π z dokładnością do n miejsc po przecinku. Czy jest to zaokrąglenie z nadmiarem, czy z niedomiarem?

a) $n = 6$ b) $n = 5$ c) $n = 4$ d) $n = 3$ e) $n = 2$

Błąd przybliżenia jest równy różnicy liczby i jej przybliżenia.

Ćwiczenie 7

Zaokrąglij liczbę do dwóch miejsc po przecinku. Podaj błąd przybliżenia.

a) 6,7824 b) 8,4653 c) 7,8951 d) 9,9962 e) 5,9039

Zadania

1. Na podstawie podanych obok informacji znajdź rozwinięcie dziesiętne liczby.

a) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{1}{300}$ e) $\frac{11}{30}$

b) $\frac{1}{60}$ d) $\frac{5}{900}$ f) $\frac{17}{90}$

$\frac{1}{3} = 0{,}33333333\ldots$
$\frac{1}{6} = 0{,}16666666\ldots$
$\frac{1}{9} = 0{,}11111111\ldots$

2. Jaka cyfra znajduje się na dwunastym, a jaka na dwudziestym piątym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby? Zaokrąglij tę liczbę do trzech miejsc po przecinku.

a) 1,(046) c) 7,0(037) e) 2,86(345)

b) 0,3(25) d) 9,(3486) f) 3,123(5037)

3. Znajdź cyfry a i b liczby o rozwinięciu okresowym $7{,}19(1ab693)$, jeśli wiadomo, że w tej liczbie na jedenastym miejscu po przecinku występuje cyfra 3, a na dwudziestym drugim cyfra 6.

4. Na podstawie podanego obok twierdzenia odpowiedz, czy rozwinięcie dziesiętne ułamka jest skończone.

a) $\frac{633}{320}$ b) $\frac{137}{480}$ c) $\frac{6561}{22\,400}$ d) $\frac{11\,111}{51\,200}$

Ułamek nieskracalny $\frac{m}{n}$ ma rozwinięcie dziesiętne skończone wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2^k \cdot 5^l$ dla pewnych liczb naturalnych k i l.

Ćwiczenie 5

a) 21 **b)** 20 **c)** 0 **d)** 1 **e)** 2

Ćwiczenie 6

a) 3,141593; z nadmiarem
b) 3,14159; z niedomiarem
c) 3,1416; z nadmiarem
d) 3,142; z nadmiarem
e) 3,14; z niedomiarem

Ćwiczenie 7

a) 6,78; błąd przybliżenia: 0,0024
b) 8,47; błąd przybliżenia: −0,0047
c) 7,90; błąd przybliżenia: −0,0049
d) 10,00; błąd przybliżenia: −0,0038
e) 5,90; błąd przybliżenia: 0,0039

Odpowiedzi do zadań

1. **a)** 0,(7) **b)** 0,01(6) **c)** 0,00(3) **d)** 0,00(5) **e)** 0,3(6) **f)** 0,1(8)

2. **a)** na 12. miejscu: 6, na 25. miejscu: 0; 1,046
b) na 12. miejscu: 2, na 25. miejscu: 5; 0,325
c) na 12. miejscu: 3, na 25. miejscu: 7; 7,004
d) na 12. miejscu: 6, na 25. miejscu: 3; 9,349
e) na 12. miejscu: 3, na 25. miejscu: 4; 2,863
f) na 12. miejscu: 5, na 25. miejscu: 0; 3,124

3. $a = 6$, $b = 3$

4. Wszystkie podane ułamki są nieskracalne.
a) $320 = 2^6 \cdot 5$, zatem rozwinięcie jest skończone.
b) $480 = 3 \cdot 160$, zatem rozwinięcie jest okresowe.
c) $22400 = 7 \cdot 3200$, zatem rozwinięcie jest okresowe.
d) $51200 = 2^{11} \cdot 5^2$, zatem rozwinięcie jest skończone.

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Przedstaw liczbę 0,(12) w postaci ułamka zwykłego.
>
> $x = 0{,}121212\ldots$
>
> $100x = 12{,}121212\ldots$ Obie strony równania mnożymy przez 100, aby przecinek znalazł się za pierwszym wystąpieniem okresu.
>
> $100x = 12 + x$
>
> $99x = 12$
>
> $x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

Przedstaw liczbę w postaci ułamka zwykłego.

a) 0,(36) b) 3,(72) c) −6,(24) d) 0,(9) e) 41,7(9)

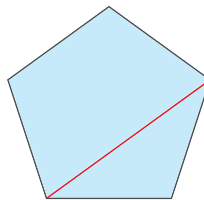
6. Liczby $x = 0{,}(6)$ i $y = 4{,}(36)$ przedstaw w postaci ułamka zwykłego, a następnie oblicz: $x + y$, $x^2 - y$, $x + \frac{1}{y}$.

7. Wyznacz cyfry x i y liczby o rozwinięciu okresowym $0{,}(1x2y3)$, jeśli wiadomo, że cyfra znajdująca się na miejscu dwudziestym trzecim po przecinku jest dwukrotnie większa od cyfry znajdującej się na miejscu dwudziestym drugim i trzykrotnie mniejsza od cyfry znajdującej się na miejscu dwudziestym czwartym.

8. a) Odgadnij regułę, zgodnie z którą zostały wypisane kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby 0,10110111011110..., a następnie podaj sześć następnych cyfr jej rozwinięcia. Czy jest to liczba wymierna?

b) Odgadnij regułę, zgodnie z którą zostały wypisane kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby 0,12345678910111213..., a następnie podaj, jaka cyfra występuje na 31. miejscu po przecinku w tym rozwinięciu. Czy jest to liczba wymierna?

9. Pięciokąt foremny o boku 1 ma przekątną o długości $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180$. Liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ jest nazywana **złotą liczbą** (patrz str. 61). Jej coraz lepszymi przybliżeniami są ułamki tworzone w następujący sposób: jako pierwszy bierzemy dowolny ułamek $\frac{a}{b}$, gdzie a, b są liczbami naturalnymi oraz $a > b > 0$. Następny ma wówczas postać $\frac{a+b}{a}$, a każdy kolejny powstaje z poprzedniego w analogiczny sposób. Na przykład, jeśli weźmiemy $a = 5$ i $b = 4$, to otrzymamy: $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{14}{9}$ itd. Wyznacz pierwszych osiem takich ułamków i sprawdź, które z nich przybliżają złotą liczbę z dokładnością do 0,005.



5. **a)** $\frac{4}{11}$ **b)** $\frac{41}{11}$ **c)** $-\frac{206}{33}$ **d)** 1 **e)** $\frac{209}{5}$

6. $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{48}{11}$, $x + y = 5\frac{1}{33}$, $x^2 - y = -3\frac{91}{99}$, $x + \frac{1}{y} = \frac{43}{48}$

7. Długość okresu wynosi 5 oraz:

$22 = 4 \cdot 5 + 2$

$23 = 4 \cdot 5 + 3$

$24 = 4 \cdot 5 + 4$

Zatem na miejscach: 22., 23. i 24. znajdują się odpowiednio cyfry: x, 2, y.

Stąd $2 = 2x$ oraz $2 = \frac{1}{3}y$, czyli $x = 1$ i $y = 6$.

8. **a)** 111110

Nie jest to liczba wymierna, gdyż jej rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i nieokresowe.

b) 0

Nie jest to liczba wymierna, gdyż jej rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i nieokresowe.

9. Pierwsze osiem ułamków:

$\frac{5}{4} = 1{,}2500$

$\frac{9}{5} = 1{,}8000$

$\frac{14}{9} \approx 1{,}5556$

$\frac{23}{14} \approx 1{,}6429$

$\frac{37}{23} \approx 1{,}6087$

$\frac{60}{37} \approx 1{,}6216$

$\frac{97}{60} \approx 1{,}6167$

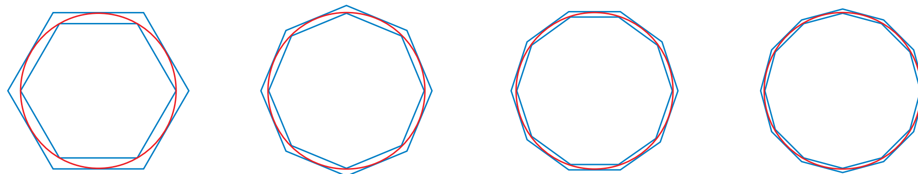
$\frac{157}{97} \approx 1{,}6186$

Przybliżenia z dokładnością do 0,005: $\frac{60}{37}$, $\frac{97}{60}$, $\frac{157}{97}$.

Warto wiedzieć

Długość okręgu. Liczba π

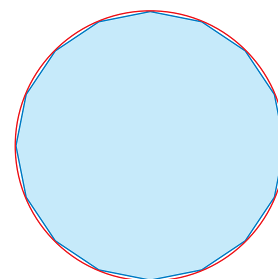
Już Archimedes wiedział, że długość okręgu można wyznaczyć z dowolną dokładnością, rozpatrując wielokąty foremne wpisane w okrąg oraz na nim opisane. Wraz ze wzrostem liczby boków wielokątów foremnych ich obwody dają coraz dokładniejsze przybliżenia długości okręgu.





1. W tabeli podano długości boków wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu 1. Dla każdego wielokąta podaj długość jego boku oraz połowę obwodu z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Dla którego z tych wielokątów długość połowy obwodu różni się od liczby π o mniej niż 0,01?

Wielokąt foremny	Długość boku
kwadrat	$\sqrt{2}$
8-kąt	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$
16-kąt	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
32-kąt	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
64-kąt	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$



Istnieje wiele wzorów, za pomocą których można otrzymać przybliżenie liczby π. Oto dwa z nich:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots$$ wzór Wallisa

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\ldots$$ wzór Leibniza

Powyższe wzory są jednak mało praktyczne – np. aby otrzymać cztery cyfry po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π, korzystając ze wzoru Leibniza, należy zsumować ponad 100 000 składników.

2. Znajdź informacje na temat innych wzorów pozwalających otrzymać przybliżenie liczby π.

Odpowiedzi do zadań

1. kwadrat: 1,4142; 2,8284;
8-kąt: 0,7654; 3,0615;
16-kąt: 0,3902; 3,1214;
32-kąt: 0,1960; 3,1365;
64-kąt: 0,0981; 3,1403;
dla 32-kąta i 64-kąta

2. $$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\ldots$$ wzór Viète'a

$$\frac{4}{\pi} = 1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\ldots}}}}$$ wzór Brounckera

$$\frac{\pi}{2} = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{9}+\ldots$$ wzór Maclaurina

$$\frac{\pi}{2} = 1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{7}\left(1+\frac{4}{9}(1+\ldots)\right)\right)\right)$$ wzór Newtona

Inne wzory na stronie http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html

1.5. Pierwiastek kwadratowy

Przypomnijmy definicję pierwiastka kwadratowego.

Definicja

Pierwiastkiem kwadratowym (drugiego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b, której kwadrat jest równy a.

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a \text{ i } b \geqslant 0$$

Przykład 1

$\sqrt{36} = 6$, bo $6^2 = 36$

$\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$, bo $(0{,}4)^2 = 0{,}16$

$\sqrt{0} = 0$, bo $0^2 = 0$

Zwróć uwagę na to, że $\sqrt{36}$ nie jest równy -6, chociaż $(-6)^2 = 36$, ponieważ w definicji założyliśmy, że pierwiastek kwadratowy jest liczbą nieujemną.

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\sqrt{144}$ d) $\sqrt{625}$ g) $\sqrt{1{,}21}$

b) $\sqrt{225}$ e) $\sqrt{2500}$ h) $\sqrt{3{,}61}$

c) $\sqrt{324}$ f) $\sqrt{8100}$ i) $\sqrt{4{,}41}$

$11^2 = 121$
$12^2 = 144$
$13^2 = 169$
$14^2 = 196$
$15^2 = 225$
$16^2 = 256$
$17^2 = 289$
$18^2 = 324$
$19^2 = 361$
$20^2 = 400$
$21^2 = 441$

Ma miejsce następująca własność:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{gdy } a \geqslant 0 \\ -a & \text{gdy } a < 0 \end{cases}$$

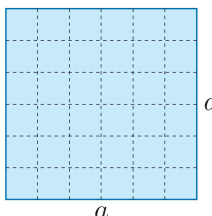
Stąd $\sqrt{5^2} = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $\sqrt{3^2}$ b) $\sqrt{(-3)^2}$ c) $\sqrt{(-9)^2}$ d) $\sqrt{(-1{,}2)^2}$ e) $\sqrt{(-\sqrt{3})^2}$

Wyznaczenie pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej odpowiada wyznaczeniu długości boku kwadratu, gdy znamy jego pole ($P = a^2$, więc $a = \sqrt{P}$).



Ćwiczenie 3

Oblicz obwód kwadratu o polu: a) $3{,}24\text{ cm}^2$, b) 1024 cm^2.

Ćwiczenie 3

a) bok kwadratu: 1,8 cm, obwód: 7,2 cm

b) bok kwadratu: 32 cm, obwód: 128 cm

Uczeń:

- oblicza wartość pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej,
- wyłącza czynnik przed znak pierwiastka kwadratowego,
- wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki kwadratowe, stosując prawa działań na pierwiastkach,
- usuwa niewymierność z mianownika, gdy w mianowniku występuje wyrażenie $a\sqrt{b}$, oraz szacuje przybliżoną wartość takich wyrażeń.

Komentarz

Warto zadać uczniom następujące pytanie:
Wiemy, że $\sqrt{a} \geqslant 0$ dla dowolnej liczby nieujemnej a. Czy może być prawdziwa równość:

$$\sqrt{9x^2} = -3x?$$

Odpowiedź: tak, dla $x \leqslant 0$.

Ćwiczenie 1

a) 12 **b)** 15 **c)** 18
d) 25 **e)** 50 **f)** 90
g) 1,1 **h)** 1,9 **i)** 2,1

Ćwiczenie 2

a) 3 **b)** 3 **c)** 9 **d)** 1,2 **e)** $\sqrt{3}$

Multiteka
- Spirala Teodorosa

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.5

Generator testów i sprawdzianów

Założenia do wzorów:

– dla pierwiastka iloczynu:
$a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$

– dla pierwiastka ilorazu:
$a \geqslant 0$ i $b > 0$

Przy odpowiednich założeniach (jakich?) prawdziwe są podane obok wzory.

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Przykład 2

a) $\sqrt{49 \cdot 144} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} = 7 \cdot 12 = 84$

b) $\sqrt{12{,}5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{12{,}5 \cdot 2} = \sqrt{25} = 5$

Ćwiczenie 4

a) 18; 3; 5,7
b) $\frac{11}{12}$, $\frac{19}{20}$, $\frac{24}{25}$
c) 4, 3, 10
d) 3, $\frac{1}{2}$, 2

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\sqrt{4 \cdot 81}$, $\sqrt{25 \cdot 0{,}36}$, $\sqrt{0{,}09 \cdot 361}$

b) $\sqrt{\frac{121}{144}}$, $\sqrt{\frac{361}{400}}$, $\sqrt{\frac{576}{625}}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$, $\sqrt{6} \cdot \sqrt{1{,}5}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$

d) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$, $\frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}}{\sqrt{35}}$

Zadania

Odpowiedzi do zadań

1. a) 3 b) -11 c) 4,2 d) 0,5 e) $-\frac{17}{20}$ f) $1\frac{19}{30}$

3. a) 2, 3, 4, 5
b) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
c) 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

4. a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $4\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{6}$ e) $6\sqrt{3}$ f) $6\sqrt{7}$ g) $14\sqrt{2}$ h) $15\sqrt{2}$

5. a) $6\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $10\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{2}$ e) $20\sqrt{2}$ f) $22\sqrt{2}$

6. a) $9\sqrt{5}$ b) $\sqrt{3}$ c) $7\sqrt{3}$ d) $-2\sqrt{5}$ e) $4{,}6\sqrt{2}$ f) $-25\sqrt{5}$

1. Oblicz.

a) $\sqrt{121} + \sqrt{49} - \sqrt{225}$

b) $\sqrt{196} - \sqrt{169} - \sqrt{144}$

c) $\sqrt{0{,}25} + \sqrt{1{,}44} + \sqrt{6{,}25}$

d) $\sqrt{3{,}61} - \sqrt{1{,}21} - \sqrt{0{,}09}$

e) $\sqrt{\frac{81}{400}} + \sqrt{\frac{9}{100}} - \sqrt{\frac{64}{25}}$

f) $\sqrt{3\frac{6}{25}} - \sqrt{2\frac{1}{4}} + \sqrt{1\frac{7}{9}}$

D **2.** Uzasadnij, że:

a) $\sqrt{1\frac{9}{16}} \neq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}}$, b) $\sqrt{2\frac{1}{4}} \neq \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$, c) $\sqrt{4\frac{1}{9}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}}$.

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że:

a) $\sqrt{2} < n < \sqrt{33}$, b) $\sqrt{10} < n < \sqrt{140}$, c) $\sqrt{80} < n < \sqrt{300}$.

4. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{48}$ e) $\sqrt{108}$ g) $\sqrt{392}$

b) $\sqrt{24}$ d) $\sqrt{96}$ f) $\sqrt{252}$ h) $\sqrt{450}$

$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} =$
$= \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

5. Doprowadź do postaci $a\sqrt{2}$.

a) $4\sqrt{2} + \sqrt{8}$ c) $\sqrt{18} + \sqrt{98}$ e) $\sqrt{18} + \sqrt{72} + \sqrt{242}$

b) $\sqrt{32} - 3\sqrt{2}$ d) $\sqrt{200} - \sqrt{50}$ f) $\sqrt{800} + \sqrt{242} - \sqrt{162}$

6. Doprowadź do postaci $a\sqrt{b}$.

a) $7\sqrt{5} + \sqrt{20}$ c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ e) $0{,}2\sqrt{50} + 0{,}8\sqrt{72} - 0{,}3\sqrt{32}$

b) $\sqrt{48} - \sqrt{27}$ d) $\sqrt{45} - \sqrt{125}$ f) $3\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 5\sqrt{180}$

2. a) $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$, $\sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \neq \frac{5}{4}$

Zatem $\sqrt{1\frac{9}{16}} \neq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}}$.

b) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$, $\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}$

Zatem $\sqrt{2\frac{1}{4}} \neq \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$.

c) $\sqrt{4\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{37}{9}}$, $\sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = \sqrt{\frac{49}{9}} \neq \sqrt{\frac{37}{9}}$

Zatem $\sqrt{4\frac{1}{9}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}}$.

7. Usuń niewymierność z mianownika, postępując tak, jak w przykładzie.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{5}{3\sqrt{10}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ f) $\frac{3}{5\sqrt{15}}$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

8. Usuń niewymierność z mianownika. Podaj przybliżoną wartość wyrażenia (przyjmij $\sqrt{2} \approx 1{,}4$).

a) $\frac{8+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{6-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ c) $\frac{5\sqrt{2}-10}{4\sqrt{2}}$

9. Oblicz.

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$ e) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63}$ g) $\sqrt{30} \cdot \sqrt{480}$

b) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$ d) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$ f) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$ h) $\sqrt{80} \cdot \sqrt{180}$

10. Oblicz.

a) $\frac{\sqrt{54} \cdot \sqrt{350}}{\sqrt{21}}$ b) $\frac{\sqrt{98} \cdot \sqrt{375}}{\sqrt{80}}$ c) $\frac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{363}}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{130}}$ d) $\frac{\sqrt{48} \cdot \sqrt{162}}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{135}}$

11. Wykonaj działania.

a) $2\sqrt{3}\left(\sqrt{27} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{3}\right)$ c) $\sqrt{3}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right)$

b) $3\sqrt{2}\left(2\sqrt{6} - 4\sqrt{8} + \sqrt{18}\right)$ d) $\sqrt{10}\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\right) - \frac{\sqrt{45} - \sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

12. Oblicz pole trapezu.

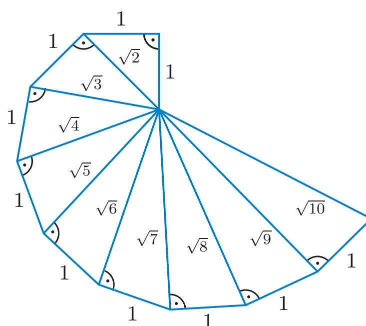
a) $\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{75}$, $3\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$, $4\sqrt{2}$ c) $\sqrt{50}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$

13. Oblicz obwód i pole trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości x i y.

a) $x = 3\sqrt{2}$, $y = 4\sqrt{2}$ b) $x = 2\sqrt{27}$, $y = 4\sqrt{12}$ c) $x = 2\sqrt{10}$, $y = \sqrt{50}$

14. Na rysunku obok przedstawiono spiralę Teodorosa. Pokazuje ona, jak konstrukcyjnie wyznaczyć odcinek o długości $\sqrt{n}$, gdzie $n > 1$ jest liczbą naturalną, gdy dany jest odcinek o długości 1. Opisz, jak za pomocą cyrkla i linijki skonstruować odcinek o długości:

a) $\sqrt{17}$, b) $\sqrt{38}$.



7. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **c)** $\frac{\sqrt{10}}{5}$
d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **e)** $\frac{\sqrt{10}}{6}$ **f)** $\frac{\sqrt{15}}{25}$

8. a) $4\sqrt{2} + 1 \approx 6{,}6$
b) $\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}6$
c) $\frac{5}{4}(1 - \sqrt{2}) \approx -0{,}5$

9. a) 6 **b)** 16 **c)** 20 **d)** 30
e) 42 **f)** 30 **g)** 120 **h)** 120

10. a) 30 **b)** $\frac{35}{4}\sqrt{6}$ **c)** 2,2 **d)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

11. a) $6 + 18\sqrt{2}$
b) $12\sqrt{3} - 30$
c) $\frac{7}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} - \sqrt{6}$
d) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{5} - 1$

12. a) 15 **b)** $6\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$ **c)** 16

13. a) $z = \sqrt{x^2 + y^2} = 5\sqrt{2}$, $Ob = 12\sqrt{2}$, $P = 12$
b) $z = 10\sqrt{3}$, $Ob = 24\sqrt{3}$, $P = 72$
c) $z = 3\sqrt{10}$, $Ob = 5(\sqrt{10} + \sqrt{2})$, $P = 10\sqrt{5}$

14. W obu przypadkach można wykorzystać spiralę Teodorosa lub postąpić, jak opisano poniżej.

a) Skonstruować trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 i 4. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość $\sqrt{17}$.

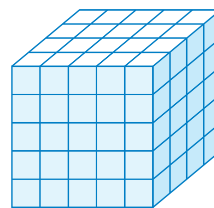
b) Najpierw skonstruować trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych długości 1. W ten sposób otrzymamy przeciwprostokątną o długości $\sqrt{2}$. Następnie skonstruować trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $\sqrt{2}$ i 6. Przeciwprostokątna otrzymanego trójkąta będzie miała długość $\sqrt{38}$.

Uczeń:

- oblicza wartość pierwiastka trzeciego stopnia z liczby nieujemnej,
- oblicza wartość pierwiastka dowolnego stopnia,
- wyłącza czynnik przed znak pierwiastka,
- włącza czynnik pod znak pierwiastka,
- porównuje liczby zapisane za pomocą pierwiastków,
- wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki, stosując prawa działań na pierwiastkach,
- usuwa niewymierność z mianownika ułamka, gdy w mianowniku występuje $\sqrt[3]{a}$.

1.6. Pierwiastek sześcienny

Rozpatrzmy zagadnienie polegające na wyznaczeniu długości krawędzi sześcianu o danej objętości V. Na przykład długość krawędzi sześcianu o objętości $V = 125\ \text{cm}^3$ jest równa 5 cm. Zapisujemy to następująco $\sqrt[3]{125} = 5$. Mówimy, że liczba 5 jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby 125.



Definicja

Pierwiastkiem sześciennym (trzeciego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę b, która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a.

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Przykład 1

Podaj pierwiastek trzeciego stopnia i uzasadnij odpowiedź.

a) $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$

b) $\sqrt[3]{0} = 0$, bo $0^3 = 0$

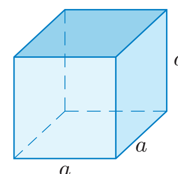
c) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$, bo $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

d) $\sqrt[3]{0{,}216} = 0{,}6$, bo $0{,}6^3 = 0{,}216$

Przykład 2

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości 27.

Objętość V sześcianu o krawędzi długości a jest równa a^3, więc $a = \sqrt[3]{V}$, czyli $a = \sqrt[3]{27} = 3$.



Ćwiczenie 1

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości V.

a) $V = 1$ b) $V = 64$ c) $V = 216$ d) $V = 8000$

Ćwiczenie 2

Oblicz, korzystając z informacji podanych obok.

a) $\sqrt[3]{512}$ c) $\sqrt[3]{1331}$ e) $\sqrt[3]{1{,}331}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{729}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{8}{729}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{729}{1331}}$

$8^3 = 512$
$9^3 = 729$
$11^3 = 1331$

Ćwiczenie 1

a) 1 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 20

Ćwiczenie 2

a) 8 **b)** $\frac{1}{9}$ **c)** 11
d) $\frac{2}{9}$ **e)** 1,1 **f)** $\frac{9}{11}$

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.6

Generator testów i sprawdzianów

Obliczanie pierwiastka trzeciego stopnia jest działaniem odwrotnym do podnoszenia do trzeciej potęgi.
Na przykład $\sqrt[3]{(11)^3} = 11$ oraz $\left(\sqrt[3]{9}\right)^3 = 9$.

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$
$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

W obliczeniach wykorzystujemy podane poniżej wzory na pierwiastek sześcienny iloczynu i pierwiastek sześcienny ilorazu. Są one analogiczne do wzorów dla pierwiastka kwadratowego.

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Przykład 3

a) $\sqrt[3]{0{,}001 \cdot 343} = \sqrt[3]{0{,}001} \cdot \sqrt[3]{343} = 0{,}1 \cdot 7 = 0{,}7$

b) $\frac{\sqrt[3]{686}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{686}{2}} = \sqrt[3]{343} = 7$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ c) $\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{98}$ e) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} - \sqrt[3]{\frac{125}{216}}$

b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$ d) $\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$

Ćwiczenie 4

Przeanalizuj podany przykład. Na jego podstawie usuń niewymierność z mianownika podanego ułamka.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

Pierwiastek nieparzystego stopnia z liczby rzeczywistej

W przeciwieństwie do definicji pierwiastka kwadratowego, definicję pierwiastka sześciennego można rozszerzyć na liczby ujemne.
Na przykład: $\sqrt[3]{-1} = -1$, bo $(-1)^3 = -1$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, bo $(-2)^3 = -8$.

Definicja

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby rzeczywistej a nazywamy taką liczbę b, która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a.

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-27}$ b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt[3]{-125}$ d) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ e) $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$

Ćwiczenie 3

a) 6 **b)** 5
c) $\sqrt[3]{4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 49} = 2 \cdot 7 = 14$
d) 2 **e)** $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{12}$ **f)** $2\frac{1}{3}$

Ćwiczenie 4

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$
b) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{2} = 2\sqrt[3]{2}$
c) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{25}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

Ćwiczenie 5

a) -3 **b)** -4 **c)** -5 **d)** $-\frac{1}{3}$ **e)** $-\frac{3}{10}$

Ogólnie dla pierwiastka n-tego stopnia mamy następujące definicje:

Jeśli n jest liczbą parzystą, to dla dowolnej liczby nieujemnej a:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to dla dowolnej liczby rzeczywistej a:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Ćwiczenie 6

Oblicz.

a) $\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[4]{0{,}0016}$ e) $\sqrt[6]{729}$ g) $\sqrt[8]{256}$ i) $\sqrt[10]{1024}$

b) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[5]{-0{,}000\,01}$ f) $\sqrt[7]{-1}$ h) $\sqrt[7]{-128}$ j) $\sqrt[9]{-512}$

Zadania

1. Podaj wartość pierwiastka.

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$ g) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$ h) $\sqrt[3]{12\frac{19}{27}}$

2. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{8}$ c) $\sqrt[3]{1000} + \sqrt[3]{27}$ e) $\sqrt[3]{0{,}125} + \sqrt[3]{0{,}001}$

b) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{512} - \sqrt[3]{216}$ f) $\sqrt[3]{0{,}027} + \sqrt[3]{0{,}008}$

3. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt[3]{32}$ b) $\sqrt[3]{250}$ c) $\sqrt[3]{135}$ d) $\sqrt[3]{375}$ e) $\sqrt[3]{108}$

4. Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $2\sqrt[3]{3}$ b) $3\sqrt[3]{2}$ c) $6\sqrt[3]{2}$ d) $4\sqrt[3]{10}$ e) $6\sqrt[3]{5}$

5. Sprawdź, czy prawdziwa jest równość.

a) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2{,}25}$ b) $\frac{2\sqrt[3]{5}}{5\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{0{,}08}$ c) $\frac{5\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$

6. Która z podanych liczb jest większa: x czy y?

a) $x = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ c) $x = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{729}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{135}{320}}$

b) $x = \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{27}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{3000}{81}}$ d) $x = \frac{\sqrt[3]{0{,}064}}{\sqrt[3]{0{,}125}}$, $y = \frac{\sqrt[3]{0{,}081}}{\sqrt[3]{0{,}192}}$

7. Porównaj liczby.

a) $4\sqrt[3]{2}$ i $2\sqrt[3]{4}$ b) $3\sqrt[3]{5}$ i $2\sqrt[3]{15}$ c) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$ i $\frac{4}{5}\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$

Ćwiczenie 6

a) 3 **b)** -2 **c)** 0,2 **d)** $-0{,}1$
e) 3 **f)** -1 **g)** 2 **h)** -2
i) 2 **j)** -2

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{4}{5}$
e) $\frac{3}{10}$ **f)** $\frac{5}{6}$ **g)** $\frac{4}{3}$ **h)** $\frac{7}{3}$

2. a) 7 **b)** 1 **c)** 13 **d)** 2
e) 0,6 **f)** 0,5

3. a) $2\sqrt[3]{4}$ **b)** $5\sqrt[3]{2}$ **c)** $3\sqrt[3]{5}$
d) $5\sqrt[3]{3}$ **e)** $3\sqrt[3]{4}$

4. a) $\sqrt[3]{24}$ **b)** $\sqrt[3]{54}$ **c)** $\sqrt[3]{432}$
d) $\sqrt[3]{640}$ **e)** $\sqrt[3]{1080}$

5. Wszystkie równości są prawdziwe.

a) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{27\cdot 2}{8\cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{2{,}25}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{5}}{5\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{8\cdot 5}{125\cdot 4}} = \sqrt[3]{\frac{2}{25}} = \sqrt[3]{0{,}08}$

c) $\frac{5\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{125\cdot 3}{27\cdot 5}} = \sqrt[3]{\frac{25}{9}} = \sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$

6. a) $x = \frac{5}{4} < y = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$

b) $x = y$

c) $x = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} < y = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

d) $x = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5} = 0,8 > y = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4} = 0,75$

7. a) $4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{128}$, $2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{32}$, zatem $4\sqrt[3]{2} > 2\sqrt[3]{4}$

b) $3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{135}$, $2\sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{120}$, zatem $3\sqrt[3]{5} > 2\sqrt[3]{15}$

c) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}\cdot\frac{64}{27}} = 1$, $\frac{4}{5}\sqrt[3]{1\frac{61}{64}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}\cdot\frac{125}{64}} = 1$, zatem liczby te są równe.

D **8.** Uzasadnij, że podana liczba jest liczbą naturalną.

a) $\sqrt[3]{3^3+4^3+5^3}$ c) $\sqrt[3]{14^2-13^2}$ e) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{18}$

b) $\sqrt[3]{1^3+6^3+8^3}$ d) $\sqrt[3]{11^2+\sqrt[3]{64}}$ f) $\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt[3]{72}$

9. Objętość prostopadłościanu o wymiarach x cm $\times$ y cm $\times$ z cm jest równa objętości pewnego sześcianu. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

a) $x=4,\ y=4,\ z=32$ b) $x=16,\ y=20,\ z=25$

10. Z trzech sześciennych klocków zbudowano wieżę. Oblicz wysokość wieży, jeśli jej objętość jest równa objętości prostopadłościanu o wymiarach:

a) 4 cm × 6 cm × 16 cm, b) 6,25 cm × 7,5 cm × 8 cm.

11. Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $3\sqrt[4]{2}$ b) $5\sqrt[4]{4}$ c) $4\sqrt[5]{2}$ d) $10\sqrt[6]{0{,}01}$ e) $2\sqrt[10]{5}$

12. Oblicz.

a) $\sqrt[4]{16}+\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{256}+\sqrt[4]{625}$

b) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{10\,000}$

c) $\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{16}-\frac{\sqrt[6]{1000}}{\sqrt[6]{0{,}001}}-\sqrt[5]{32}$

d) $\sqrt[8]{8}\cdot\sqrt[8]{32}-\sqrt[10]{1024}+\sqrt[5]{1024}$

e) $2\sqrt[4]{\frac{81}{16}}-3\sqrt[4]{\frac{256}{625}}$

f) $6\sqrt[4]{0{,}0625}-3\sqrt[4]{0{,}0081}$

g) $\sqrt[6]{64}-\sqrt[6]{\frac{1}{64}}-\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$

h) $\sqrt[6]{1\,000\,000}+\sqrt[8]{256}$

13. Oblicz.

a) $\sqrt[4]{250}\cdot\sqrt[4]{40}+\sqrt[4]{375}\cdot\sqrt[4]{135}$

b) $\sqrt[4]{\frac{243}{500}}\cdot\sqrt[4]{\frac{64}{15}}-\sqrt[4]{\frac{63}{50}}\cdot\sqrt[4]{\frac{18}{175}}$

c) $\sqrt[5]{405}\cdot\sqrt[5]{1875}-\sqrt[5]{108}\cdot\sqrt[5]{72}$

d) $\sqrt[5]{\frac{275}{108}}\cdot\sqrt[5]{\frac{500}{99}}+\sqrt[5]{\frac{56}{135}}\cdot\sqrt[5]{\frac{20}{63}}$

14. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-8000}$ b) $\sqrt[3]{-0{,}001}$ c) $\sqrt[3]{-\frac{125}{64}}$ d) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$

15. Oblicz.

a) $2\sqrt[3]{-1}-\sqrt[3]{-27}$

b) $-\sqrt[3]{\frac{-64}{125}}+\sqrt[3]{-0{,}125}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-8}{125}}-\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{-9}\cdot\sqrt[3]{-9}}{\sqrt[3]{-3}}-\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{-3}}$

e) $\frac{\sqrt[3]{-16}}{5\sqrt[3]{2}}-\frac{\sqrt[3]{-72}}{\sqrt[3]{-9}}$

f) $\frac{\sqrt[5]{-128}}{\sqrt[5]{-4}}+\frac{\sqrt[7]{-128}}{\sqrt[9]{-1}}$

D **16.** Uzasadnij, że iloczyn xyz równa się zero.

a) $x=\sqrt[5]{-32}-\sqrt[4]{16},\ y=\sqrt[7]{1}-2\sqrt[6]{1},\ z=\sqrt[10]{1024}+2\sqrt[9]{-1}$

b) $x=\sqrt[5]{32}-\sqrt[4]{81},\ y=\sqrt[5]{-32}-\sqrt[4]{81},\ z=\sqrt[5]{-1}+\sqrt[4]{1}$

c) $x=\sqrt[7]{40}-\sqrt[5]{2},\ y=\sqrt[4]{81}-\sqrt[5]{243},\ z=\sqrt[5]{-11}+\sqrt[4]{11}$

8. a) $\sqrt[3]{27+64+125}=$
$=\sqrt[3]{216}=6$

b) $\sqrt[3]{1+216+512}=$
$=\sqrt[3]{729}=9$

c) $\sqrt[3]{196-169}=\sqrt[3]{27}=3$

d) $\sqrt[3]{121+4}=\sqrt[3]{125}=5$

e) $\sqrt[3]{3\cdot4\cdot2\cdot9}=\sqrt[3]{27\cdot8}=$
$=3\cdot2=6$

f) $\sqrt[3]{8\cdot3\cdot8\cdot9}=$
$=\sqrt[3]{8\cdot8\cdot27}=2\cdot2\cdot3=12$

9. a) 8 cm **b)** 20 cm

10. V – objętość sześcianu,
$h=3\sqrt[3]{V}$ – wysokość wieży

a) $V=\frac{1}{3}\cdot4\cdot6\cdot16=$
$=2\cdot4^3$ [cm^3]
$h=3\cdot4\sqrt[3]{2}=12\sqrt[3]{2}$ [cm]

b) $V=\frac{1}{3}\cdot6,25\cdot7,5\cdot8=$
$=\frac{1}{3}\cdot3\cdot2,5^3\cdot2^3=5^3$ [cm^3]
$h=15$ cm

11. a) $\sqrt[4]{162}$ **b)** $\sqrt[4]{2500}$ **c)** $\sqrt[5]{2048}$
d) $\sqrt[6]{10000}$ **e)** $\sqrt[10]{5120}$

12. a) 14 **b)** 9 **c)** -10 **d)** 4
e) 0,6 **f)** 2,1 **g)** $1\frac{1}{4}$ **h)** 12

13. a) 25 **b)** $\frac{3}{5}$ **c)** 9 **d)** $\frac{7}{3}$

14. a) -20 **b)** $-0{,}1$
c) $-\frac{5}{4}$ **d)** $-1{,}5$

15. a) 1 **b)** 0,3 **c)** $\frac{14}{15}$ **d)** -1
e) $-2{,}4$ **f)** 4

16. $xyz=0$, gdyż:
a) $z=0$,
b) $z=0$,
c) $y=0$.

Uczeń:
- oblicza wartość potęgi liczby o wykładniku naturalnym i całkowitym ujemnym,
- porządkuje liczby zapisane w postaci potęg, korzystając z własności potęg,
- stosuje prawa działań na potęgach do obliczania wartości wyrażeń,
- stosuje prawa działań na potęgach do upraszczania wyrażeń algebraicznych,
- porównuje liczby zapisane w postaci potęg.

Komentarz
Aby ułatwić uczniom zrozumienie potęg o wykładniku 0 zapisujemy potęgę a^n jako iloczyn liczby 1 i n czynników równych liczbie a. Wówczas:

$$a^n = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

W szczególności:
$a^3 = 1 \cdot a \cdot a \cdot a$,
$a^2 = 1 \cdot a \cdot a$,
$a^1 = 1 \cdot a = a$,
$a^0 = 1$, gdy $a \neq 0$.
Dla $n \neq 0$ mamy $0^n = 0$.
Gdyby w powyższych przykładach nie istniały założenia: $n \neq 0$ i $a \neq 0$, wówczas $0^0 = 1$ i $0^0 = 0$ jednocześnie, co prowadzi do sprzeczności. Zatem wartość 0^0 nie jest definiowana.

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.7

Generator testów i sprawdzianów

1.7. Potęga o wykładniku całkowitym

Przykład 1
Załóżmy, że mamy parę królików oraz że liczba królików podwaja się co pół roku. Ile królików będziemy mieli po 5 latach?

$$2 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{10 \text{ półrocznych okresów}} = 2^{11} = 2048$$

Przypomnijmy definicję potęgi o wykładniku naturalnym.

Definicja
Dla liczby naturalnej $n > 1$ potęgą a^n nazywamy iloczyn n czynników równych liczbie a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

(n – wykładnik potęgi, a – podstawa potęgi)

Przyjmujemy również, że: $a^1 = a$ oraz $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$.

Uwaga. Nie definiujemy wartości 0^0.

Przykład 2
a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$
b) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
c) $(-3)^1 = -3$
d) $345^0 = 1$

Przydatna jest umiejętność rozpoznawania niektórych potęg liczb: 2, 3, 4, 5.

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	
6	64	729		
7	128			
8	256			
9	512			
10	1024			

Ćwiczenie 1
Oblicz.
a) 9^2, 9^3, 9^4
b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^3$, $\left(\frac{3}{4}\right)^4$
c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^4$

Ćwiczenie 2
Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej.

$$(-2)^0,\ (-2)^4,\ (-2)^9,\ (-3)^4,\ (-3)^9$$

Ćwiczenie 1
a) 81, 729, 6561 **b)** $\frac{9}{16}$, $\frac{27}{64}$, $\frac{81}{256}$ **c)** $\frac{4}{25}$, $-\frac{8}{125}$, $\frac{16}{625}$

Ćwiczenie 2
$(-3)^9 < (-2)^9 < (-2)^0 < (-2)^4 = 2^4 < 3^4 = (-3)^4$

Możemy również określić potęgę o wykładniku całkowitym ujemnym.

Definicja

Dla liczby naturalnej $n \geqslant 1$ i dla liczby $a \neq 0$ przyjmujemy, że:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Przykład 3

a) $3^{-1} = \frac{1}{3}$ b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) 4^{-2} c) $(-3)^{-2}$ e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ i) $0{,}2^{-2}$

b) 4^{-3} d) $(-3)^{-3}$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$ j) $(-0{,}2)^{-3}$

Ćwiczenie 4

Czy podane liczby są równe?

a) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}$, $\left(\frac{7}{5}\right)^{3}$ b) $\left(-\frac{4}{9}\right)^{6}$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{-6}$ c) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-5}$, $\left(\frac{5}{3}\right)^{5}$

Przy obliczaniu wartości wyrażeń, w których występują potęgi, możemy wykorzystywać prawa działań na potęgach.

Twierdzenie

Dla liczb całkowitych m, n oraz różnych od 0 liczb rzeczywistych a i b:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $3^9 \cdot 3^{-6}$ c) $(2^5)^{-2}$ e) $5^{-9} : 5^{-11}$ g) $6^5 : 3^5$ i) $6^3 \cdot 2^{-5}$

b) $0{,}5^3 \cdot 0{,}5^7$ d) $(0{,}25^{-1})^{-4}$ f) $4 : 4^{-4}$ h) $10^{10} : 5^{10}$ j) $10^4 \cdot 5^{-2}$

Ćwiczenie 6

Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie.

a) $(x^2 \cdot x^6) : x^4$ b) $(x^7 : x^2) : x^{-1}$ c) $(x^2y)^{-1} \cdot x^3$ d) $(x^{-2}y^3)^{-2} : y^{-3}$

Ćwiczenie 3

a) $\frac{1}{16}$ **b)** $\frac{1}{64}$ **c)** $\frac{1}{9}$ **d)** $-\frac{1}{27}$
e) 4 **f)** 32 **g)** $\frac{9}{4}$ **h)** $\frac{81}{16}$
i) 25 **j)** -125

Ćwiczenie 4

a) tak **b)** tak **c)** nie

Ćwiczenie 5

a) 27 **b)** $\frac{1}{1024}$ **c)** $\frac{1}{1024}$ **d)** $\frac{1}{256}$
e) 25 **f)** 1024 **g)** 32 **h)** 1024
i) $\frac{27}{4}$ **j)** 400

Ćwiczenie 6

a) x^4, $x \neq 0$ **b)** x^6, $x \neq 0$ **c)** $\frac{x}{y}$, $x, y \neq 0$ **d)** $\frac{x^4}{y^3}$, $x, y \neq 0$

Zadania

1. Oblicz.

a) $(-2)^5$, $(-2)^{-5}$, 2^{-5}
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$
c) $\left(\sqrt{3}\right)^4$, $\left(\sqrt{3}\right)^{-2}$, $\left(\sqrt{3}\right)^{-6}$
d) $\left(\sqrt{2}\right)^6$, $\left(\sqrt{2}\right)^7$, $\left(\sqrt{2}\right)^{-8}$

2. Zapisz liczbę w postaci 2^m, gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^3 \cdot 4^6$ b) $4^{-5} \cdot 8^2$ c) $64^2 : 32^{-3}$ d) $(16^{-2} : 4^{-8}) \cdot 8^4$

3. Zapisz podane liczby w postaci potęg o tej samej podstawie.

a) 16, $\frac{1}{64}$, 8^3, $\left(\sqrt{2}\right)^4$, 1024^2
b) $\frac{1}{81}$, 27, 9^{-2}, $\left(\sqrt{3}\right)^6$, 81^{-5}
c) $0{,}001$, 100^5, $\left(\frac{1}{100}\right)^{-4}$, $\left(\frac{1}{0{,}1}\right)^{-6}$
d) 25^{-3}, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{125}\right)^4$, 625^{-5}

4. Oblicz.

a) $\left(-2\sqrt{3}\right)^{-3}$ b) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$ c) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^{-3}$ d) $\left((-3\sqrt{2})^{-1}\right)^{-2}$

5. Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie.

a) $a^3 \cdot a^5 \cdot a^{-6}$
b) $(a^8 \cdot a^{-3}) : a^2$
c) $(a^4 : a^{-1}) \cdot a^{-3}$
d) $(a^7 : a^{-2}) : a^{-4}$
e) $(a^{-1} \cdot a^6)^{-2} \cdot (a^{-3})^2$
f) $(a^5 : a^{-4})^2 : (a^{-4})^{-1}$

6. Która z liczb jest większa: x czy y?

a) $x = 2^4 \cdot 4^{-2}$, $y = 4^{-4} : 8^{-2}$
b) $x = (2^{-4} : 2^{-6})^{-1}$, $y = (2^{-4} \cdot 2^{-3})^{-1}$

7. Oblicz.

a) $\frac{2^{-2}}{3^{-3}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2$
b) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}$
c) $\frac{6^0 + 0^6}{6^{-1}} + (4^6 - 16^3)$
d) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\right) : 6^{-2}$
e) $(0{,}5 \cdot 8^6 - 2 \cdot 16^4) : 7^3$
f) $\left(\left(\frac{5}{2}\right)^3 : \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-4}$

8. Oblicz.

a) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^{-3} : 16^2$
b) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-3} \cdot \frac{8^{-3}}{2^5}$
c) $\frac{25^{-2}}{5^{-4}} - \left(\frac{3}{5}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-7}$
d) $\left(\frac{9}{7}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{7}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$
e) $\left(\frac{125}{16}\right)^{-2} : \left(\frac{75}{8}\right)^{-3}$
f) $\left(\frac{54}{35}\right)^3 \cdot \left(\frac{81}{49}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

9. Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie tak, aby nie występowały w nim potęgi o ujemnych wykładnikach.

a) $\left(\frac{1}{2}x^{-2}y^{-1}\right)^3 : (2x^2y^0)^{-3}$
b) $(a^{-1}b^{-2}c^{-3}) \cdot \left(\frac{a^2}{bc}\right)^{-1}$
c) $\frac{\left((3ab)^3c^{-2}\right)^2}{a^6c^{-6}}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) -32, $-\frac{1}{32}$, $\frac{1}{32}$
b) 9, -27, 81
c) 9, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{27}$
d) 8, $8\sqrt{2}$, $\frac{1}{16}$

2. a) 2^{15} **b)** 2^{-4} **c)** 2^{27} **d)** 2^{20}

3. a) 2^4, 2^{-6}, 2^9, 2^2, 2^{20}
b) 3^{-4}, 3^3, 3^{-4}, 3^3, 3^{-20}
c) 10^{-3}, 10^{10}, 10^8, 10^{-6}
d) 5^{-6}, 5^2, 5^{-12}, 5^{-20}

4. a) $-\frac{\sqrt{3}}{72}$ **b)** $\frac{4}{81}$
c) $-40\sqrt{5}$ **d)** 18

5. $a \neq 0$ **a)** a^2 **b)** a^3 **c)** a^2
d) a^{13} **e)** a^{-16} **f)** a^{14}

6. a) x **b)** y

7. a) $1\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{16}{81}$ **c)** 6 **d)** $3\frac{3}{8}$
e) 0 **f)** $2\frac{1}{2}$

8. a) 2 **b)** 16 **c)** $\frac{2}{5}$
d) 27 **e)** $13\frac{1}{2}$ **f)** $\frac{7}{9}$

9. a) $x \neq 0$, $y \neq 0$, $\frac{1}{y^3}$ **b)** $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $\frac{1}{a^3bc^2}$ **c)** $a \neq 0$, $c \neq 0$, $729b^6c^2$

1.8. Notacja wykładnicza

Przy zapisywaniu bardzo dużych i bardzo małych liczb wygodnie jest posługiwać się **notacją wykładniczą** (inaczej zwaną notacją naukową).

Definicja

Liczbę dodatnią a możemy przedstawić w postaci iloczynu:

$$a = x \cdot 10^n$$

gdzie x jest liczbą spełniającą warunki $1 \leqslant x < 10$, a n – liczbą całkowitą. Takie przedstawienie liczby nazywamy **notacją wykładniczą**.

Przykład 1

a) $326\,000\,000\,000 = 3{,}26 \cdot 10^{11}$ (11 cyfr)

b) $0{,}000\,000\,97 = 9{,}7 \cdot 10^{-7}$ (7 cyfr)

Ćwiczenie 1

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) $5\,020\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ ton (masa Syriusza)

b) $0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,029\,9$ kg (masa cząsteczki wody)

c) $0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,910\,956$ kg (masa elektronu)

Zadania

1. Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

a) $6\,320\,000$ c) $43{,}728$ e) $0{,}000\,65$ g) $0{,}100\,324$

b) $109\,000\,000$ d) $8765{,}2$ f) $0{,}003\,02$ h) $0{,}000\,001$

2. Zapisz liczbę w postaci dziesiętnej.

a) $8{,}62 \cdot 10^4$ b) $7{,}89 \cdot 10^{-4}$ c) $8{,}34 \cdot 10^{-5}$ d) $6{,}02 \cdot 10^0$

3. Oblicz. Wynik podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

a) $(3{,}4 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^{-5})$

b) $(1{,}4 \cdot 10^3) \cdot (8 \cdot 10^2)$

c) $(4{,}8 \cdot 10^{-1}) : (1{,}6 \cdot 10^{-3})$

d) $(7{,}2 \cdot 10^{-3}) : (1{,}2 \cdot 10^{-2})$

Oblicz.
$(5{,}2 \cdot 10^9) \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-7}) = 5{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{9-7} =$
$= 2{,}6 \cdot 10^2 = 260$

4. Oblicz. Wynik podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

a) $42\,000 \cdot 6500$ b) $1600 \cdot 0{,}0125$ c) $0{,}0044 \cdot 0{,}055$ d) $0{,}0605 \cdot 8600$

Uczeń:
- zapisuje i odczytuje liczby w notacji wykładniczej,
- wykonuje działania na liczbach zapisanych w notacji wykładniczej.

Ćwiczenie 1

a) $5{,}02 \cdot 10^{27}$ ton
b) $2{,}99 \cdot 10^{-26}$ kg
c) $9{,}10956 \cdot 10^{-31}$ kg

Odpowiedzi do zadań

1. a) $6{,}32 \cdot 10^6$ **b)** $1{,}09 \cdot 10^8$ **c)** $4{,}3728 \cdot 10^1$ **d)** $8{,}7652 \cdot 10^3$ **e)** $6{,}5 \cdot 10^{-4}$ **f)** $3{,}02 \cdot 10^{-3}$ **g)** $1{,}00324 \cdot 10^{-1}$ **h)** $1 \cdot 10^{-6}$

2. a) $86\,200$ **b)** $0{,}000\,789$ **c)** $0{,}000\,083\,4$ **d)** $6{,}02$

3. a) $1{,}36 \cdot 10^3 = 1360$
b) $1{,}12 \cdot 10^6 = 1\,120\,000$
c) $3 \cdot 10^2 = 300$
d) $6 \cdot 10^{-1} = 0{,}6$

4. a) $2{,}73 \cdot 10^8 = 273\,000\,000$
b) $2 \cdot 10 = 20$
c) $2{,}42 \cdot 10^{-4} = 0{,}000\,242$
d) $5{,}203 \cdot 10^2 = 520{,}3$

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.8

Generator testów i sprawdzianów

5. a) $2 \cdot 10^4 = 20000$
b) $9 \cdot 10^{10} = 90000000000$
c) $3 \cdot 10^{12} = 3000000000000$
d) $1{,}6 \cdot 10^{11} = 160000000000$

6. a) $9{,}6 \cdot 10^9$ **b)** $6 \cdot 10^{-13}$
c) $1{,}02 \cdot 10^0$ **d)** $1{,}2 \cdot 10^0$

5. Oblicz. Wynik podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

a) 2 100 000 000 : 105 000
b) 243 000 000 000 : 2,7
c) 51 000 000 000 : 0,017
d) 102 400 000 000 : 0,64

6. Oblicz. Wynik zapisz w notacji wykładniczej.

a) $\frac{(3{,}2 \cdot 10^{-12}) \cdot (1{,}2 \cdot 10^{4})}{4 \cdot 10^{-18}}$

b) $\frac{(5{,}2 \cdot 10^{8}) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-3})}{1{,}3 \cdot 10^{18}}$

c) $\frac{(3{,}4 \cdot 10^{-15}) \cdot (7{,}5 \cdot 10^{-16})}{2{,}5 \cdot 10^{-30}}$

d) $\frac{(4{,}8 \cdot 10^{18}) \cdot (1{,}8 \cdot 10^{-10})}{(6 \cdot 10^{-8}) \cdot (1{,}2 \cdot 10^{16})}$

7. W tabeli podano wybrane prędkości w zapisie dziesiętnym i notacji wykładniczej. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tę tabelę.

	v [m/s] (zapis dziesiętny)	v [m/s] (notacja wykładnicza)
Rosnący włos	0,000 000 004 6	$4{,}6 \cdot 10^{-9}$
Szybki ślimak	0,001 94	$1{,}94 \cdot 10^{-3}$
Sprinter	10	$1 \cdot 10^{1}$
Ziemia wokół Słońca	29 600	$2{,}96 \cdot 10^{4}$
Światło w próżni	299 792 458	$2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}$


8. Prędkość światła wynosi w przybliżeniu 300 000 km/s. Odległość, którą przebywa światło w ciągu roku (365 dni), nazywamy rokiem świetlnym. Oblicz, ile kilometrów ma rok świetlny i przedstaw podane niżej wielkości w kilometrach. Odpowiedź zapisz w notacji wykładniczej.

Odległość z Ziemi wyrażona w jednostkach świetlnych		w kilometrach
Księżyc	1,3 sekundy świetlnej	$3{,}9 \cdot 10^{5}$
Słońce	8 minut 19 sekund świetlnych	$1{,}5 \cdot 10^{8}$
Pluton	5,5 godziny świetlnej	$5{,}9 \cdot 10^{9}$
Gwiazda Polarna	około 430 lat świetlnych	$4{,}1 \cdot 10^{15}$
środek Galaktyki	około 28 000 lat świetlnych	$2{,}6 \cdot 10^{17}$
najbliższe kwazary	około 1,5 mld lat świetlnych	$1{,}4 \cdot 10^{22}$


9. Największą prędkość, z jaką kiedykolwiek podróżował człowiek, osiągnęła załoga misji Apollo 10 – wynosiła ona niemal 40 000 km/h. Oblicz, ile czasu zajęłoby pokonanie z tą prędkością odległości dzielącej nas od Gwiazdy Polarnej. Odpowiedź podaj, stosując zapis dziesiętny i notację wykładniczą.

8. 1 rok świetlny $= 300\,000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 9{,}4608 \cdot 10^{12}$ [km]

9. $\frac{430 \cdot 9{,}4608 \cdot 10^{12}\ \text{km}}{40\,000\ \text{km/h}} = 101703600000\ \text{h} \approx 1{,}017 \cdot 10^{11}\ \text{h}$

$\frac{430 \cdot 300\,000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600}{40\,000} : (24 \cdot 365) = 11771250$ [lat] $\approx 1{,}17 \cdot 10^{7}$ [lat]

Nazwy wielkich liczb

Bilion amerykański czy bilion europejski

Dlaczego europejski miliard to amerykański bilion, a europejski bilion to amerykański trylion?

Amerykańskie nazewnictwo wielkich liczb odnosi się do zapisu 10^{3n+3} i łączy łacińskie przedrostki: *bi-* ($n = 2$), *tri-* ($n = 3$) itd., z końcówką *-lion*.

Europejskie nazewnictwo pokazuje wielokrotność miliona lub miliarda i do łacińskiego przedrostka dodaje, odpowiednio: *-lion* lub *-liard*.

Amerykański matematyk Edward Kasner wprowadził nazwę googol, oznaczającą 10^{100}.

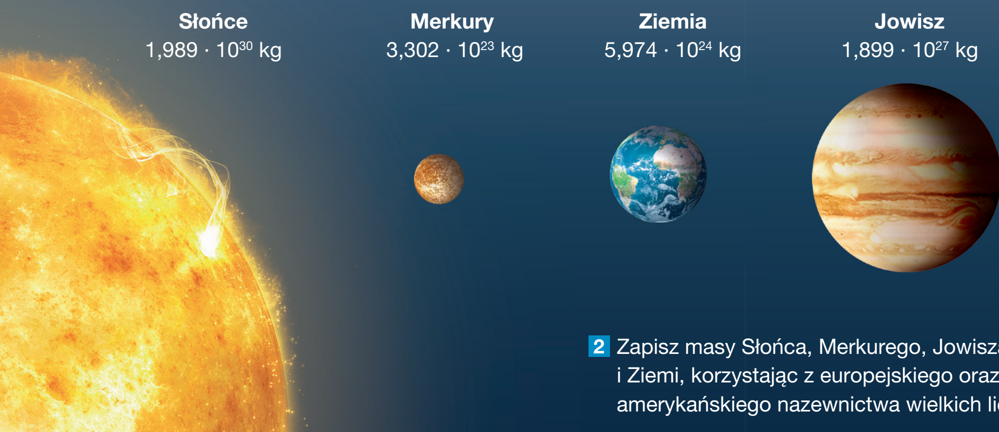
1 googol = 10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

1 Wyszukaj w internecie informacje o liczbach googol i googolplex.

Potęga 10	Nazwa europejska	Nazwa amerykańska
9	miliard	bilion
12	bilion	trylion
15	biliard	kwadrylion
18	trylion	kwintylion
21	tryliard	sekstylion
24	kwadrylion	septylion
27	kwadryliard	oktylion
30	kwintylion	nonylion
33	kwintyliard	decylion
36	sekstylion	undecylion
39	sekstyliard	duodecylion
42	septylion	tradecylion
45	septyliard	kwatuordecylion
48	oktylion	kwindecylion
51	oktyliard	seksdecylion
54	nonylion	septendecylion

Słońce i planety

Poniżej podano masy: najmniejszej z planet w naszym systemie planetarnym – Merkurego, największej – Jowisza, a także Ziemi i Słońca (na rysunku nie zachowano skali). Masa Słońca stanowi 99,89% masy Układu Słonecznego.



2 Zapisz masy Słońca, Merkurego, Jowisza i Ziemi, korzystając z europejskiego oraz amerykańskiego nazewnictwa wielkich liczb.

2. Nazewnictwo europejskie:
Słońce – 1,989 kwintylionów kg,
Merkury – 330,2 tryliardów kg,
Jowisz – 1,899 kwadryliardów kg,
Ziemia – 5,974 kwadrylionów kg

Nazewnictwo amerykańskie:
Słońce – 1,989 nonylionów kg,
Merkury – 330,2 sekstylionów kg,
Jowisz – 1,899 oktylionów kg,
Ziemia – 5,974 septylionów kg

1.9. Potęga o wykładniku wymiernym

Uczeń:
- zapisuje pierwiastek n-tego stopnia w postaci potęgi o wykładniku $\frac{1}{n}$,
- oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych,
- zapisuje daną liczbę w postaci potęgi o wykładniku wymiernym,
- upraszcza wyrażenia, stosując prawa działań na potęgach.

Definicja

Dla dowolnej liczby $a \geqslant 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

Oblicz.

a) $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$ b) $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$ c) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $16^{\frac{1}{2}}$ c) $81^{\frac{1}{2}}$ d) $8^{\frac{1}{3}}$ e) $27^{\frac{1}{3}}$ f) $81^{\frac{1}{4}}$

Ćwiczenie 1
a) 2 **b)** 4 **c)** 9 **d)** 2 **e)** 3 **f)** 3

Potęgę o wykładniku wymiernym $\frac{m}{n}$ definiujemy następująco:

Definicja

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Przykład 2

Oblicz.

a) $9^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{9}\right)^3 = 3^3 = 27$ b) $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$ c) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $4^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{\frac{4}{3}}$ e) $81^{1,5}$ g) $125^{-\frac{2}{3}}$ i) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2,5}$

b) $27^{\frac{2}{3}}$ d) $32^{\frac{3}{5}}$ f) $4^{2,5}$ h) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$ j) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

Ćwiczenie 2
a) 8 **b)** 9 **c)** 16 **d)** 8 **e)** 729
f) 32 **g)** $\frac{1}{25}$ **h)** 27 **i)** 32 **j)** $\frac{9}{4}$

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m zachodzi równość $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\left(\sqrt{10}\right)^6$ c) $\sqrt[3]{125^2}$ e) $\left(\sqrt[8]{625}\right)^2$ g) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2$ i) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{49}}\right)^3$

b) $\sqrt{4^{10}}$ d) $\sqrt[5]{32^3}$ f) $\sqrt{\sqrt{81}}$ h) $\sqrt[3]{\sqrt{4^3}}$ j) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{16^6}}$

Ćwiczenie 3

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m} = \sqrt[n]{\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Ćwiczenie 4
a) 1000 **b)** 1024 **c)** 25 **d)** 8
e) 5 **f)** 3 **g)** 3 **h)** 2 **i)** 7 **j)** 4

Prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładniku całkowitym.

Dla liczb wymiernych x, y i liczb rzeczywistych $a > 0$, $b > 0$:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Przykład 3

Oblicz.

a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 3^2 = 9$

b) $6^{\frac{4}{3}} : 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 6^1 = 6$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ b) $5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{5}{3}}$ c) $4^{\frac{9}{2}} : 4^{\frac{5}{2}}$ d) $2^{7,5} : 2^{2,5}$ e) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$

Przykład 4

Oblicz.

a) $8^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = (8 \cdot 2)^{\frac{5}{2}} = 16^{\frac{5}{2}} = \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 4^5 = 1024$

b) $10^{\frac{3}{2}} : 5^{\frac{3}{2}} = (10 : 5)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$

c) $80^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = (16 \cdot 5)^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 = 40$

Ćwiczenie 6

Oblicz.

a) $12^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$ b) $12^{\frac{5}{2}} : 3^{\frac{5}{2}}$ c) $24^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ d) $9^{\frac{4}{3}} : 24^{\frac{2}{3}}$ e) $375^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$

Ćwiczenie 7

Oblicz.

a) $\left(9^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{10}{3}}$ b) $\left(8^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{9}}$ c) $\left(32^{\frac{28}{25}}\right)^{-\frac{5}{7}}$ d) $\left(125^{\frac{2}{3}}\right)^{0,75}$ e) $\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{2,5}\right)^{0,6}$

Obliczając przybliżone wartości potęg o wykładniku wymiernym, możemy skorzystać z odpowiedniego kalkulatora (przykładowe wyniki zostały przedstawione obok).

$10^{0,3} \approx 1,995262315$
$10^{0,45} \approx 2,818382931$
$10^{0,625} \approx 4,216965034$

Ćwiczenie 8

Korzystając z powyższych przybliżeń, podaj z dokładnością do czterech miejsc po przecinku przybliżoną wartość liczby:

a) $10^{2,3}$, b) $10^{3,45}$, c) $10^{\frac{13}{8}}$, d) $10^{-1,7}$.

Ćwiczenie 5

a) 4 **b)** 125 **c)** 16 **d)** 32 **e)** $\sqrt[3]{3}$

Ćwiczenie 6

a) $36^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{36}\right)^3 = 216$

b) $4^{\frac{5}{2}} = 32$

c) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 4 \cdot 3 = 12$

d) $\left(3^2\right)^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{6}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = 3^2 \cdot \left(\sqrt[3]{8}\right)^{-2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

e) $125^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 5 \cdot 3 = 15$

Ćwiczenie 7

a) $9^2 = 81$

b) $8^{\frac{2}{3}} = 4$

c) $32^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{16}$

d) $125^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}$

e) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27}$

Ćwiczenie 8

a) $10^2 \cdot 10^{0,3} \approx 199,5262$

b) $10^3 \cdot 10^{0,45} \approx 2818,3829$

c) $10^1 \cdot 10^{0,625} \approx 42,1697$

d) $10^{0,3} : 10^2 \approx 0,0200$

W dalszym toku nauki rozszerzymy pojęcie potęgi na potęgę o wykładniku rzeczywistym, czyli także niewymiernym, np. $2^{\sqrt{3}}$, $10^{\sqrt{2}}$.

W tabeli obok przedstawiono kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $10^{\sqrt{2}}$.

Uwaga. $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$

$10^{1,4}$	$\approx 25{,}118864315$
$10^{1,41}$	$\approx 25{,}703957828$
$10^{1,414}$	$\approx 25{,}941793621$
$10^{1,414213562}$	$\approx 25{,}954553497$
$10^{\sqrt{2}}$	$\approx 25{,}954553519$

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 2.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt{0{,}5}$ d) $\sqrt[3]{4}$ e) $\sqrt{512}$ f) $\sqrt[3]{1024}$ g) $2\sqrt{2}$ h) $2\sqrt[3]{2}$

2. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 7.

a) $\sqrt{7^3}$ b) $\sqrt[3]{7^2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ e) $\sqrt{\frac{1}{7^3}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$ g) $49\sqrt{7}$ h) $7 \cdot \sqrt[5]{7}$

3. Oblicz.

a) $9^{\frac{3}{2}}$ b) $125^{\frac{2}{3}}$ c) $8^{-\frac{4}{3}}$ d) $27^{-\frac{2}{3}}$ e) $144^{-0,5}$ f) $16^{0,75}$ g) $10\,000^{0,25}$ h) $81^{-0,125}$

4. Oblicz.

a) $0{,}04^{\frac{3}{2}}$ b) $0{,}16^{-\frac{1}{2}}$ c) $0{,}027^{\frac{2}{3}}$ d) $0{,}0016^{-\frac{3}{4}}$ e) $0{,}0625^{-\frac{5}{4}}$ f) $0{,}000\,32^{\frac{3}{5}}$ g) $0{,}0081^{-1,25}$ h) $0{,}000\,002\,56^{0,375}$

5. Oblicz.

a) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$ b) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$ c) $0{,}008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$ d) $0{,}0256^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\sqrt[3]{10}\right)^9$

6. Zapisz liczbę w postaci a^x, gdzie a jest liczbą naturalną, a x – liczbą wymierną.

a) $\sqrt{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt[3]{5^{\frac{1}{2}}}$ c) $\sqrt[4]{5^{\frac{3}{2}}}$ d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ e) $\sqrt{3} : \sqrt[3]{3}$ f) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[4]{3}$ g) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{2}$ h) $9^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} : \sqrt{3}$ i) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}} : 8^{\frac{2}{3}}$ j) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}}$ k) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{27} : 6^{\frac{3}{4}}$ l) $3^{\frac{1}{8}} \cdot 12^{\frac{3}{4}} : \sqrt{8}$

7. Która liczba jest większa: x czy y?

a) $x = 3 \cdot 1024^{-0,1}$, $y = 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} : \sqrt{2}$ b) $x = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} : \sqrt[6]{\frac{125}{8}}$, $y = \sqrt[6]{36^3}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $2^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{3}}$ c) $2^{-\frac{1}{2}}$ d) $2^{\frac{2}{3}}$ e) $2^{\frac{9}{2}}$ f) $2^{\frac{10}{3}}$ g) $2^{\frac{3}{2}}$ h) $2^{\frac{4}{3}}$

2. a) $7^{\frac{3}{2}}$ b) $7^{\frac{2}{3}}$ c) $7^{-\frac{1}{2}}$ d) $7^{-\frac{1}{3}}$ e) $7^{-\frac{3}{2}}$ f) $7^{-\frac{3}{5}}$ g) $7^{\frac{5}{2}}$ h) $7^{\frac{6}{5}}$

3. a) 27 b) 25 c) $\frac{1}{16}$ d) $\frac{1}{9}$ e) $\frac{1}{12}$ f) 8 g) 10 h) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. a) 0,008 b) 2,5 c) 0,09 d) 125 e) 32 f) 0,008 g) $411\frac{127}{243}$ h) 0,008

5. a) 16 b) $\frac{1}{3}$ c) 1 d) 64

6. a) $2^{\frac{1}{4}}$ b) $5^{\frac{1}{6}}$ c) $5^{\frac{3}{8}}$ d) $2^{\frac{5}{6}}$ e) $3^{\frac{1}{6}}$ f) $3^{\frac{1}{12}}$ g) $2^{\frac{4}{3}}$ h) $3^{\frac{7}{6}}$ i) $2^{\frac{3}{2}}$ j) 18^1 k) $2^{-\frac{1}{2}}$ l) $3^{\frac{7}{8}}$

7. a) $x = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$y = 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} : 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} < 1{,}5$, gdyż $\left(\sqrt{2}\right)^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Zatem $x > y$.

b) $x = \left(\frac{5}{2}\right)^3 : \left(\left(\frac{5}{2}\right)^3\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}} > 2{,}5^2 = 6{,}25$

$y = 36^{\frac{3}{6}} = 36^{\frac{1}{2}} = 6$

Zatem $x > y$.

1.10. Logarytm i jego własności

Pojęcie logarytmu wprowadził ponad 400 lat temu szkocki matematyk John Napier (1550–1617), a logarytmy dziesiętne zdefiniował Anglik Henry Briggs (1561–1630) – opublikował on wielocyfrowe tablice takich logarytmów.

Definicja

Logarytmem o podstawie 10 (logarytmem dziesiętnym) z dodatniej liczby b nazywamy liczbę x taką, że $10^x = b$. Piszemy wówczas $\log b = x$.

Przykład 1

a) $\log 1000 = 3$, ponieważ $10^3 = 1000$

b) $\log 0{,}1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0{,}1$

c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, ponieważ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

Pytanie o wartość $\log b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 10, aby otrzymać liczbę b.

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\log 10$ b) $\log 100$ c) $\log 100\,000$ d) $\log 0{,}01$ e) $\log \sqrt[3]{10}$

Rozpatrywane są też logarytmy o innych podstawach. Na przykład logarytmem o podstawie 2 z liczby b jest taka liczba x, że $2^x = b$. Piszemy wówczas $\log_2 b = x$.

Przykład 2

a) $\log_2 8 = 3$, ponieważ $2^3 = 8$

b) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$

c) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$, ponieważ $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

Pytanie o wartość $\log_2 b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 2, aby otrzymać liczbę b.

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $\log_2 16$ b) $\log_2 1024$ c) $\log_2 \frac{1}{2}$ d) $\log_2 \frac{1}{8}$ e) $\log_2 \sqrt{2}$

Definicja

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. **Logarytm** o podstawie a z liczby b to wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę logarytmowaną b.

$$\log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

Ćwiczenie 2

a) 4 **b)** 10 **c)** -1 **d)** -3 **e)** $\frac{1}{2}$

Uczeń:

– oblicza logarytm danej liczby,
– stosuje równości wynikające z definicji logarytmu do obliczeń,
– wyznacza podstawę logarytmu, gdy dana jest wartość logarytmu, podaje odpowiednie założenia dla podstawy logarytmu oraz liczby logarytmowanej,
– stosuje twierdzenia o logarytmie iloczynu, ilorazu oraz potęgi do obliczania wartości wyrażeń z logarytmami,
– stosuje twierdzenie o logarytmie iloczynu, ilorazu i potęgi do uzasadniania równości wyrażeń,
– uzasadnia podstawowe własności logarytmów.

Ćwiczenie 1

a) 1 **b)** 2 **c)** 5 **d)** -2 **e)** $\frac{1}{3}$

Multiteka
- Wykres funkcji logarytmicznej
- Logarytmy

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.10

Generator testów i sprawdzianów

Przykład 3

a) $\log_3 9 = 2$, ponieważ $3^2 = 9$

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$

$$\log_a b = x$$

liczba logarytmowana – b; podstawa logarytmu – a

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\log_3 3$ b) $\log_3 81$ c) $\log_3 \sqrt{3}$ d) $\log_3 27$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_3 \sqrt[4]{3}$

Ćwiczenie 3

a) 1 **b)** 4 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** 3 **e)** -2 **f)** $\frac{1}{4}$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby dodatniej a różnej od 1 prawdziwe są podane obok własności.

$\log_a 1 = 0$
$\log_a a = 1$

Ćwiczenie 4

Dla dowolnej liczby dodatniej $a \neq 1$:
$a^0 = 1$, zatem z definicji logarytmu $\log_a 1 = 0$,
$a^1 = a$, zatem z definicji logarytmu $\log_a a = 1$.

W obliczeniach wykorzystywane są następujące własności logarytmów (ich dowody zostaną przedstawione w dalszym toku nauki).

Twierdzenie

Jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ — logarytm iloczynu

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ — logarytm ilorazu

$\log_a b^p = p \log_a b$ — logarytm potęgi

Przykład 4

a) $\log_2(256 \cdot 1024) = \log_2 256 + \log_2 1024 = 8 + 10 = 18$

b) $\log_2 16\sqrt{2} = \log_2 16 + \log_2 \sqrt{2} = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.

a) $\log_2(64 \cdot 256)$ b) $\log_5(125 \cdot 625)$ c) $\log_5 5\sqrt{5}$ d) $\log_2 8\sqrt[3]{2}$ e) $\log_3 9\sqrt[4]{3}$

Przykład 5

a) $\log_2 \frac{0{,}25}{32} = \log_2 0{,}25 - \log_2 32 = -2 - 5 = -7$

b) $\log_3 \frac{81}{\sqrt{3}} = \log_3 81 - \log_3 \sqrt{3} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 6

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm ilorazu.

a) $\log_2 \frac{0{,}5}{64}$ b) $\log_2 \frac{1024}{0{,}125}$ c) $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{8}$ d) $\log_5 \frac{625}{\sqrt{5}}$ e) $\log_3 \frac{243}{\sqrt[4]{3}}$

Ćwiczenie 5

a) $\log_2 64 + \log_2 256 = 6 + 8 = 14$
b) $\log_5 125 + \log_5 625 = 3 + 4 = 7$
c) $\log_5 5 + \log_5 \sqrt{5} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$
d) $\log_2 8 + \log_2 \sqrt[3]{2} = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$
e) $\log_3 9 + \log_3 \sqrt[4]{3} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 6

a) $\log_2 0,5 - \log_2 64 = -1 - 6 = -7$
b) $\log_2 1024 - \log_2 \frac{1}{8} = 10 - (-3) = 13$
c) $\log_2 \sqrt{2} - \log_2 8 = \frac{1}{2} - 3 = -2\frac{1}{2}$
d) $\log_5 625 - \log_5 \sqrt{5} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$
e) $\log_3 243 - \log_3 \sqrt[4]{3} = 5 - \frac{1}{4} = 4\frac{3}{4}$

Ćwiczenie 7

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm potęgi.

a) $\log_2 4^{10}$ b) $\log_2 32^4$ c) $\log_3 9^6$ d) $\log_3 81^{-4}$

$\log_2 8^5 = 5\log_2 8 = 5\cdot 3 = 15$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log_2 512$ b) $\log_2 2$ c) $\log_2 \frac{1}{32}$ d) $\log_2 \sqrt[5]{2}$ e) $\log_2 \sqrt{8}$

2. Oblicz.

a) $\log_3 1$ b) $\log_3 243$ c) $\log_3 \frac{1}{3}$ d) $\log_3 3\sqrt{3}$ e) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{27}}$

3. Oblicz.

a) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$ e) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$

4. Sprawdź prawdziwość równości $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$ dla podanych wartości x i y.

a) $x = 4,\ y = 16$ b) $x = 8,\ y = \frac{1}{4}$ c) $x = \sqrt{2},\ y = \sqrt{8}$

5. Sprawdź prawdziwość równości $\log_3 x - \log_3 y = \log_3 \frac{x}{y}$ dla podanych wartości x i y.

a) $x = 27,\ y = 3$ b) $x = 81,\ y = 9$ c) $x = 3,\ y = \sqrt{3}$

6. Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.

a) $\log_4 2 + \log_4 8$ b) $\log_6 2 + \log_6 3$ c) $\log_2 12 + \log_2 \frac{2}{3}$

D **7.** Uzasadnij poniższą równość.

a) $\log 15 + \log 12 - 2 = \log \frac{9}{5}$ b) $\log_2 54 - \log_2 3 = 2\log_2 \sqrt{3} + \log_2 6$

8. W karcie wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych na egzaminie maturalnym z biologii, chemii i fizyki znajduje się tablica przybliżonych wartości logarytmów dziesiętnych. Korzystając z zamieszczonego fragmentu tablicy, podaj przybliżone wartości:

a) $\log 0{,}03$, $\log 0{,}3$, $\log 3$,

b) $\log 0{,}054$, $\log 0{,}0054$, $\log 5{,}4$,

c) $\log 3 + \log 9$, $\log 8 - \log 2$.

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
0,01	−2,000	**0,26**	−0,585	**0,51**	−0,292
0,02	−1,699	**0,27**	−0,569	**0,52**	−0,284
0,03	−1,523	**0,28**	−0,553	**0,53**	−0,276
0,04	−1,398	**0,29**	−0,538	**0,54**	−0,268
0,05	−1,301	**0,30**	−0,523	**0,55**	−0,260
0,06	−1,222	**0,31**	−0,509	**0,56**	−0,252
0,07	−1,155	**0,32**	−0,495	**0,57**	−0,244

Ćwiczenie 7

a) 20 **b)** 20 **c)** 12 **d)** −16

Odpowiedzi do zadań

1. a) 9 **b)** 1 **c)** −5 **d)** $\frac{1}{5}$ **e)** $\frac{3}{2}$

2. a) 0 **b)** 5 **c)** −1 **d)** $\frac{3}{2}$ **e)** $-\frac{3}{2}$

3. a) −1 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 3 **e)** $\frac{1}{2}$

4. a) $2 + 4 = 6$
b) $3 - 2 = 1$
c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

5. a) $3 - 1 = 2$
b) $4 - 2 = 2$
c) $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

6. a) 2 **b)** 1 **c)** 3

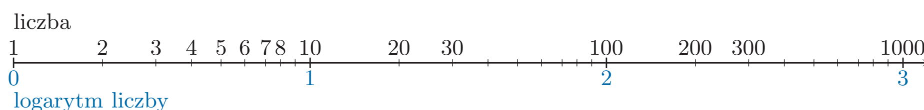
8. a) −1,523, −0,523, 0,477
b) −1,268, −2,268, 0,732
c) 1,431, 0,602

7. a) $\log 15 + \log 12 - 2 = \log 15 + \log 12 - \log 100 = \log \frac{15\cdot 12}{100} = \log \frac{9}{5}$
b) $\log_2 54 - \log_2 3 = \log_2 \frac{54}{3} = \log_2 18$
$2\log_2 \sqrt{3} + \log_2 6 = \log_2 3 + \log_2 6 = \log_2 18$
Zatem $\log_2 54 - \log_2 3 = 2\log_2 \sqrt{3} + \log_2 6$.

Warto wiedzieć

Skala logarytmiczna

Czasami, zamiast porównywać dane wielkości, wygodniej jest porównywać ich logarytmy. Stosuje się wówczas tak zwaną **skalę logarytmiczną**. Jest nią np. **skala Richtera**, określająca siłę trzęsienia ziemi. Wykorzystuje się w niej logarytm dziesiętny. Każdy kolejny stopień tej skali oznacza 10-krotnie większą siłę trzęsienia. Na rysunku poniżej pokazano, jak skonstruować skalę logarytmiczną wykorzystującą logarytm dziesiętny.



Liczby na górze takiej skali nie są położone równomiernie, ale zgodnie z wartościami ich logarytmów:

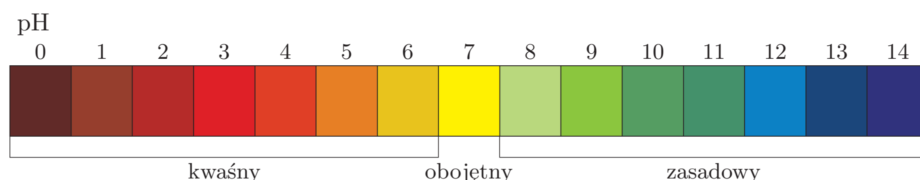
$\log 2 \approx 0{,}30$	$\log 4 \approx 0{,}60$	$\log 6 \approx 0{,}78$	$\log 8 \approx 0{,}90$
$\log 3 \approx 0{,}48$	$\log 5 \approx 0{,}70$	$\log 7 \approx 0{,}85$	$\log 9 \approx 0{,}95$

1. a) Korzystając z tego, że $\log 10x = 1 + \log x$, wskaż, którym punktom z powyższej osi odpowiadają liczby: 40, 90.

b) Korzystając z tego, że $\log 100x = 2 + \log x$, wskaż, którym punktom z powyższej osi odpowiadają liczby: 400, 900.

2. Przyjmując jako jednostkę 1 cm, naszkicuj skalę logarytmiczną i zaznacz na niej liczby $a = 10$, $b = 10^4$, $c = 10^6$, $d = 10^{-4}$, $e = 10^{-6}$.

Innym przykładem wykorzystania skali logarytmicznej jest stosowana w chemii skala pH, opisująca odczyn roztworu.



Każdą z liczb od 0 do 14 z powyższej skali otrzymujemy, mnożąc logarytm dziesiętny odpowiedniego stężenia jonów wodorowych przez -1.

Na przykład dla wody stężenie to wynosi 10^{-7} mol/dm^3.

Zatem pH wody obliczamy następująco: $\text{pH(wody)} = -\log 10^{-7} = 7$.

Dla wody morskiej pH wynosi od 7,5 do 8,4, dla kawy od 5 do 5,9, a dla soku pomarańczowego 3,5.

1. a) $\log 40 = \log(10 \cdot 4) = 1 + \log 4 \approx 1{,}6$,
$\log 90 = \log(10 \cdot 9) = 1 + \log 9 \approx 1{,}95$

b) $\log 400 = 2 + \log 4 \approx 2{,}6$,
$\log 900 = 2 + \log 9 \approx 2{,}95$

1.11. Procenty (1)

Obliczanie procentu danej liczby

Należy pamiętać, że procenty zawsze odnoszą się do jakiejś całości (wielkości ustalonej).

$1\%w = \frac{1}{100}w = 0{,}01w$; $15\%w = \frac{15}{100}w = 0{,}15w$;

$4{,}5\%w = \frac{4{,}5}{100}w = 0{,}045w$

1% (1 procent) danej wielkości to 0,01 tej wielkości.

Ćwiczenie 1

Oblicz, ile zapłacimy, jeżeli kupimy czapkę i rękawice po obniżce (w tabeli podano ceny przed obniżką i wysokość obniżki).

	Cena	Obniżka
czapka	45 zł	o 40%
rękawice	60 zł	o 35%

Warto zauważyć, że wielokrotnej zmiany wartości o pewien procent nie można zastąpić jednorazową zmianą o sumę procentów każdej ze zmian.

Ćwiczenie 2

W styczniu narty kosztowały 825 zł. W lutym ich cenę obniżono o 30%, a w marcu – o dalsze 20%. Ile trzeba było zapłacić za narty po marcowej obniżce? Ile kosztowałyby, gdyby ich cenę od razu obniżono o 50%?

Ćwiczenie 3

Cena kajaka wynosiła 1000 zł. Cenę podniesiono najpierw o 20%, a następnie o 15%. Ile kosztuje kajak po tych zmianach? O ile procent wzrosła cena kajaka w stosunku do ceny początkowej?

Ćwiczenie 4

Po dwukrotnej obniżce ceny pewnego towaru o $p\%$ jego cena spadła o $x\%$. Oblicz p, jeśli: a) $x = 36$, b) $x = 51$.

W niektórych zagadnieniach wymagana jest większa dokładność, wówczas możemy posłużyć się dziesiątą częścią procentu, czyli **promilem**.

1‰ (1 promil) danej wielkości to 0,001 tej wielkości.

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) 8‰ liczby 300
b) 22‰ liczby 1400
c) 50‰ liczby 100
d) 5‰ liczby 1000
e) 0,2‰ liczby 180
f) 5,5‰ liczby 180

Ćwiczenie 5

a) 2,4 **b)** 30,8 **c)** 5 **d)** 5 **e)** 0,036 **f)** 0,99

Uczeń:
- oblicza procent danej liczby,
- wyjaśnia pojęcia procentu i punktu procentowego,
- oblicza, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba,
- wyznacza liczbę, gdy dany jest jej procent,
- zmniejsza i zwiększa liczbę o dany procent,
- stosuje obliczenia procentowe w zadaniach praktycznych.

Ćwiczenie 1

Czapka – 27 zł, rękawice – 39 zł, razem 66 zł.

Ćwiczenie 2

Cena nart po obniżce:
marcowej –
$0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 825 = 462$ [zł],
o 50% – $0{,}5 \cdot 825 = 412{,}5$ [zł]

Ćwiczenie 3

Cena kajaka po dwóch zmianach:
$1{,}15 \cdot 1{,}2 \cdot 1000 = 1380$ [zł].
Cena wzrosła o 38% w stosunku do ceny początkowej.

Ćwiczenie 4

Niech c oznacza cenę towaru przed obniżką.

$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \cdot c = \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot c$

a) $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 1 - \frac{36}{100}$
$p = 20$

b) $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 1 - \frac{51}{100}$
$p = 30$

Multiteka
- Procenty – rozwiązywanie zadania „od końca"
- Obliczanie wysokości odsetek na lokacie

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.11

Generator testów i sprawdzianów

Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Przykład 1

Za jedną akcję firmy X tydzień temu trzeba było zapłacić 25 zł, a dzisiaj – o 2,25 zł więcej. O ile procent podrożały akcje?

$$\frac{2{,}25}{25} \cdot 100\% = 9\%$$

Akcje podrożały o 9%.

Ćwiczenie 6

W tabeli podano ceny jednej akcji firmy Y i firmy Z w lutym i w marcu. Oblicz, o ile procent podrożały akcje każdej z tych firm.

	Luty	Marzec
Y	18 zł	24,3 zł
Z	24 zł	27 zł

Ćwiczenie 6
Firma Y: o 35%,
firma Z: o 12,5%.

Ćwiczenie 7

Oblicz, jakim procentem liczby x jest liczba y oraz jakim procentem liczby y jest liczba x.

a) $x = 100$, $y = 50$ b) $x = 50$, $y = 40$ c) $x = 10$, $y = 16$

Ćwiczenie 7
a) $y = 50\%x$, $x = 200\%y$
b) $y = 80\%x$, $x = 125\%y$
c) $y = 160\%x$, $x = 62{,}5\%y$

Wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Przykład 2

W tabeli podano ceny zestawów rondli po obniżce oraz wysokość obniżki. Oblicz cenę dużego zestawu przed obniżką.

Zestaw	Obniżka	Cena
duży	o 15%	272 zł
średni	o 24%	190 zł
mały	o 32%	85 zł

Oznaczmy przez x cenę dużego zestawu przed obniżką. Obecna cena stanowi 85% z x, czyli: $\frac{85}{100}x = 272$ i stąd $x = 272 \cdot \frac{100}{85} = 320$ [zł].

Ćwiczenie 8

Oblicz cenę średniego i cenę małego zestawu rondli przed obniżką, korzystając z danych z przykładu 2.

Ćwiczenie 8
Cena średniego zestawu: 250 zł,
cena małego zestawu: 125 zł.

Zadania

1. Oblicz.

a) 401% liczby 40 b) 15‰ liczby 300 c) 2‰ liczby 2

2. Cenę sukni ślubnej obniżono o p%. O ile procent należałoby podnieść nową cenę, aby suknia kosztowała tyle samo co przed obniżką?

a) $p = 50$ b) $p = 20$ c) $p = 36$

Odpowiedzi do zadań

1. a) 160,4 **b)** 4,5 **c)** 0,004

2. Niech c oznacza cenę wyjściową sukni, a x – liczbę procent, o jaką należałoby podnieść cenę.

a) $0{,}5c\left(1 + \frac{x}{100}\right) = c$, skąd $x = 100$
b) $0{,}8c\left(1 + \frac{x}{100}\right) = c$, skąd $x = 150$
c) $0{,}64c\left(1 + \frac{x}{100}\right) = c$, skąd $x = 56{,}25$

3. Cenę pewnego towaru podniesiono dwukrotnie o $p\%$. O ile procent należałoby obniżyć jego cenę, by kosztował tyle, co na początku?

a) $p = 25$ b) $p = 50$

4. Wycieczka do Londynu kosztuje 1200 zł. Jaka byłaby cena tej wycieczki:

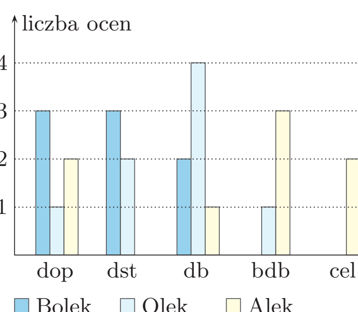
a) gdyby najpierw podniesiono ją o 10%, a następnie obniżono o 10%,
b) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 25%,
c) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 20%?



5. Na diagramie obok przedstawiono liczbę poszczególnych ocen, jakie bracia Bolek, Olek i Alek otrzymali na koniec pierwszego semestru.

a) Ile procent ocen Olka to oceny dobre i bardzo dobre?

b) Ile procent wszystkich ocen braci stanowią oceny lepsze od oceny dopuszczającej?



6. Firma A w II kwartale miała obroty o 50% większe niż w I kwartale. W III kwartale jej obroty spadły o 20%, zaś w IV – spadły o kolejne 20%. Oblicz, jakie były obroty firmy A w pozostałych kwartałach, jeżeli wyniosły: a) w II kwartale 3 750 000 zł, b) w IV kwartale 1 440 000 zł.

7. Cena brutto komputera jest równa cenie netto plus 23% podatku VAT.

a) Cena netto komputera jest równa 2200 zł. Oblicz jego cenę brutto. Ile procent ceny brutto stanowi podatek VAT?

b) Cena brutto komputera jest równa 3198 zł. Oblicz jego cenę netto. Ile procent ceny brutto stanowi cena netto?

c) Podatek VAT doliczony do ceny netto komputera wyniósł 483 zł. Jaka jest cena brutto tego komputera? Ile byłaby równa cena brutto tego komputera, gdyby jego cena netto została podniesiona o 200 zł?

3. Niech c – cena wyjściowa towaru, x – liczba procent, o jaki należałoby obniżyć cenę.
a) $1{,}25 \cdot 1{,}25c\left(1 - \frac{x}{100}\right) = c$
$x = 36$
b) $1{,}5 \cdot 1{,}5c\left(1 - \frac{x}{100}\right) = c$
$x = 55{,}(5)$

4. **a)** 1188 zł **b)** 1125 zł
c) 1080 zł

5. **a)** 62,5% **b)** 75%

6. **a)** I kwartał: 2 500 000 zł,
III kwartał: 3 000 000 zł,
IV kwartał: 2 400 000 zł,
b) I kwartał: 1 500 000 zł,
II kwartał: 2 250 000 zł,
III kwartał: 1 800 000 zł

7. **a)** Cena brutto: $1{,}23 \cdot 2200 = 2706$ [zł]
$\frac{0{,}23 \cdot 2200}{1{,}23 \cdot 2200} \approx 0{,}187$
Podatek stanowi około 18,7% ceny brutto.
b) Cena netto: $3198 : 1{,}23 = 2600$ [zł]
$\frac{1}{1{,}23} \approx 0{,}813$
Cena netto stanowi około 81,3% ceny netto.
c) Cena netto: $483 : 0{,}23 = 2100$ [zł]
Cena brutto: $1{,}23 \cdot 2100 = 2583$ [zł]
Cena brutto po podniesieniu ceny netto: $1{,}23 \cdot 2300 = 2829$ [zł]

Uczeń:
- stosuje obliczenia procentowe w zadaniach praktycznych,
- stosuje obliczenia procentowe w zadaniach praktycznych dotyczących płac, podatków, rozliczeń bankowych.

1.12. Procenty (2)

Przykład 1

W tabeli przedstawiono procentowy udział Chińskiej Republiki Ludowej, Republiki Południowej Afryki i Stanów Zjednoczonych w światowym wydobyciu złota w latach 1995 i 2008.



Kraj	1995 rok	2008 rok
ChRL	6,2%	12,2%
RPA	23,3%	9,8%
USA	14,1%	9,9%

Źródło: http://www.goldsheetlinks.com/production

Zauważmy, że udział Chin w światowym wydobyciu złota w tym czasie prawie się podwoił. Można też powiedzieć, że wzrósł on o 6 **punktów procentowych**. Udział RPA spadł w tym czasie o 13,5 punktu procentowego.

Przykład 2

Sondaż przeprowadzony we wrześniu pokazał, że partię X popiera 12% wyborców. W październiku poparcie dla partii X deklarowało 18% wyborców.

Można powiedzieć, że poparcie dla partii X wzrosło o 6 punktów procentowych lub że liczba osób popierających tę partię wzrosła o 50%.

Ćwiczenie 1

W tabeli przedstawiono wyniki sondażu, w którym pytano o poparcie dla partii Y oraz Z.

	Luty	Marzec
Y	16%	20%
Z	10%	8%

a) O ile punktów procentowych wzrosło poparcie dla partii Y? O ile procent wzrosła liczba osób popierających partię Y?

b) O ile punktów procentowych zmalało poparcie dla partii Z? O ile procent zmalała liczba osób popierających partię Z?

Ćwiczenie 2

W tabeli podano wysokość oprocentowania lokat w bankach A i B w latach 2017 i 2018. Jak zmieniło się oprocentowanie w każdym z tych banków? Odpowiedź podaj w punktach procentowych.

	2017	2018
A	4,3%	5,8%
B	5,4%	4,2%

Ćwiczenie 1

a) poparcie o 4 punkty procentowe, liczba osób o 25%

b) poparcie o 2 punkty procentowe, liczba osób o 20%

Ćwiczenie 2

W banku A wzrosło o 1,5 punktu procentowego, w banku B zmalało o 1,2 punktu procentowego.

Multiteka
- Procenty – rozwiązywanie zadania „od końca"
- Obliczanie wysokości odsetek na lokacie

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.12

Generator testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

Kapitał 5000 zł złożono w banku na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości r w skali roku. Podaj wielkość kapitału po roku.

a) $r = 2\%$ b) $r = 3{,}5\%$ c) $r = 4\%$

Kapitał w wysokości k złożony na rok przy oprocentowaniu rocznym w wysokości $r\%$ wynosi po roku $k\left(1 + \frac{r}{100}\right)$.

Zadania

1. Do banku A wpłaciliśmy 8000 złotych na lokatę roczną oprocentowaną 4,3% w skali roku. O ile więcej zarobilibyśmy, gdybyśmy wpłacili tę samą kwotę do banku B, w którym oprocentowanie lokaty rocznej jest o 1,5 punktu procentowego wyższe niż w banku A?

2. Połowę z 6000 zł złożono na lokatę roczną w banku A, a drugą połowę – w banku B. Odsetki uzyskane po roku w banku B były o 45 zł wyższe niż odsetki w banku A. O ile punktów procentowych było wyższe oprocentowanie lokaty w banku B od oprocentowania lokaty w banku A?

3. Tomek złożył w banku 7500 zł na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. Oblicz, jaką kwotę odbierze po roku, jeśli od odsetek:

a) nie jest pobierany podatek,

b) jest pobierany podatek w wysokości 20%.

Uwaga. W Polsce podatek od odsetek wynosi 19%.

4. Darek chciałby za rok wydać na sprzęt sportowy 5250 zł. Czy uzyska potrzebną kwotę, jeśli złoży 5000 zł na lokacie rocznej oprocentowanej 5% w skali roku, a od naliczanych odsetek jest pobierany podatek w wysokości 20%?

5. Krysia wpłaciła do banku pewną kwotę na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. Od dopisanych odsetek został pobrany podatek w wysokości 20%. Jaką kwotę:

a) odebrała po roku, jeśli do banku wpłaciła 2250 zł,

b) wpłaciła, jeśli po roku odebrała z banku 2580 zł?

6. Kwotę 12 000 zł podzielono na dwie części. Jedną część wpłacono do banku A na lokatę roczną oprocentowaną 3% w skali roku. Drugą część wpłacono do banku B na lokatę roczną oprocentowaną 3,5% w skali roku. W obu bankach od dopisanych odsetek został pobrany podatek w wysokości 20%. Jaką kwotę wpłacono do banku A, jeśli po roku z obu banków odebrano łącznie 12 300 zł?

Ćwiczenie 3

a) 5100 zł
b) 5175 zł
c) 5200 zł

Odpowiedzi do zadań

1. $K_A = 8000(1 + 0{,}043) = 8344$ [zł]
$K_B = 8000(1 + 0{,}043 + 0{,}015) = 8464$ [zł]
$K_B - K_A = 120$ zł
Zarobilibyśmy o 120 zł więcej.

2. Niech r_A, r_B – oprocentowania odpowiednio w bankach A i B.
$3000r_A + 45 = 3000r_B$
$r_A + 0{,}015 = r_B$
W banku B oprocentowanie było wyższe o 1,5 punktu procentowego.

3. Odsetki wyniosą:
$0{,}04 \cdot 7500 = 300$ [zł]
a) $7500 + 300 = 7800$ [zł]
b) I sposób
Podatek od odsetek będzie równy $0{,}2 \cdot 300 = 60$ [zł]
Tomek odbierze po roku:
$7500 + 300 - 60 = 7740$ [zł]

II sposób
Po zapłaceniu podatku oprocentowanie wyniesie:
$0{,}8 \cdot 4\% = 3{,}2\%$
Tomek odbierze po roku:
$7500(1 + 0{,}032) = 7740$ [zł]

4. $5000(1 + 0{,}05 \cdot 0{,}8) = 5200$ [zł]
Darek nie uzyska potrzebnej kwoty.

5. a) $2250(1 + 0{,}04 \cdot 0{,}8) = 2322$ [zł]
Krysia odebrała 2322 zł.
b) Niech K oznacza kwotę wpłaconą do banku.
$K(1 + 0{,}04 \cdot 0{,}8) = 2580$
$K = 2500$ [zł]
Krysia wpłaciła 2500 zł.

6. Niech x oznacza kwotę wpłaconą do banku A.
$0{,}8 \cdot 0{,}03x + 0{,}8 \cdot 0{,}035(12000 - x) = 300$
$x = 9000$
Do banku A wpłacono 9000 zł.

1.13. Zagadnienia uzupełniające

Liczby pierwsze

- Największa znana liczba pierwsza (znaleziona w grudniu 2018 roku) jest równa $2^{82\,589\,933}-1$, a jej zapis dziesiętny ma 24 862 048 cyfr. Wielkich liczb pierwszych poszukuje się pośród liczb specjalnej postaci, na przykład 2^p-1 (tak zwanych liczb Mersenne'a), gdzie p jest liczbą pierwszą.
- Do tej pory nie udało się rozwiązać wielu problemów dotyczących liczb pierwszych. Na przykład nie wiadomo, czy istnieje nieskończenie wiele bliźniaczych liczb pierwszych (bliźniaczymi nazywamy liczby pierwsze różniące się od siebie o 2, np. 3 i 5, 17 i 19 czy też 9 999 971 i 9 999 973).

1. W kwadracie magicznym sumy liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i w obu przekątnych są sobie równe (oznaczmy tę sumę literą S). Przerysuj do zeszytu i uzupełnij przedstawiony obok kwadrat magiczny składający się z liczb pierwszych, jeśli $S=1077$.

569	59	449
239	359	479
269	659	149

Sito Eratostenesa

Jedną z metod wyszukiwania kolejnych liczb pierwszych jest **sito Eratostenesa**. Zastosujemy je do wyszukania liczb pierwszych wśród liczb: $2, 3, \ldots, 24$. Zaczynamy od wypisania wszystkich tych liczb, następnie zaznaczamy liczbę 2 – najmniejszą liczbę pierwszą i wykreślamy jej wszystkie wielokrotności:

(2), 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, 21, ~~22~~, 23, ~~24~~

Najmniejsza niewykreślona liczba jest kolejną liczbą pierwszą – jest nią 3. Zaznaczamy ją i wśród pozostałych liczb wykreślamy wszystkie jej wielokrotności:

(2), (3), ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~

Powyższą procedurę powtarzamy dla kolejnych liczb pierwszych tak długo, aż wszystkie liczby będą albo zaznaczone jako pierwsze, albo wykreślone.

(2), (3), ~~4~~, (5), ~~6~~, (7), ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, (11), ~~12~~, (13), ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, (17), ~~18~~, (19), ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, (23), ~~24~~

D **2.** Stosując sito Eratostenesa, wyznacz wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 100. Uzasadnij, że po wykreśleniu wielokrotności liczby 7 wszystkie niewykreślone liczby będą pierwsze.

Odpowiedzi do zadań

2. (2), (3), ~~4~~, (5), ~~6~~, (7), ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, (11), ~~12~~, (13), ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, (17), ~~18~~, (19), ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, (23), ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, (29), ~~30~~, (31), ~~32~~, ~~33~~, ~~34~~, ~~35~~, ~~36~~, (37), ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~, (41), ~~42~~, (43), ~~44~~, ~~45~~, ~~46~~, (47), ~~48~~, ~~49~~, ~~50~~, ~~51~~, ~~52~~, (53), ~~54~~, ~~55~~, ~~56~~, ~~57~~, ~~58~~, (59), ~~60~~, (61), ~~62~~, ~~63~~, ~~64~~, ~~65~~, ~~66~~, (67), ~~68~~, ~~69~~, ~~70~~, (71), ~~72~~, (73), ~~74~~, ~~75~~, ~~76~~, ~~77~~, ~~78~~, (79), ~~80~~, ~~81~~, ~~82~~, (83), ~~84~~, ~~85~~, ~~86~~, ~~87~~, ~~88~~, (89), ~~90~~, ~~91~~, ~~92~~, ~~93~~, ~~94~~, ~~95~~, ~~96~~, (97), ~~98~~, ~~99~~

Liczby pierwsze: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Gdyby któraś z niewykreślonych liczb była złożona, to dwa z jej czynników pierwszych musiałyby być równe co najmniej 11, co oznaczałoby, że jest równa co najmniej 121. Jest to niemożliwe, więc zostały same liczby pierwsze.

Liczby Fermata

Pierre de Fermat (1607–1665) – francuski matematyk, z zawodu prawnik. Większości swoich prac nie opublikował. Tak zwane **wielkie twierdzenie Fermata** (opublikowane dopiero po jego śmierci, w 1670 r.) mówi, że nie istnieją liczby naturalne dodatnie x, y, z, n takie, że $x^n + y^n = z^n$ dla $n > 2$. Twierdzenie to zostało udowodnione dopiero w 1995 r. Innym pojęciem związanym z jego nazwiskiem są liczby $F_k = 2^{2^k} + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną, nazywane **liczbami Fermata**. Pięć początkowych liczb Fermata:



$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$

$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$

$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$

$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$

$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537$

Fermat przypuszczał, że wszystkie liczby $F_k = 2^{2^k} + 1$ są pierwsze, ale w 1732 r. **Leonhard Euler** [czyt. ojler] wykazał, że $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$, czyli jest liczbą złożoną. Do dziś nie wiadomo, czy którakolwiek z liczb Fermata oprócz: F_0, F_1, F_2, F_3 i F_4, jest liczbą pierwszą. Poniższe twierdzenie, udowodnione przez **Carla Friedricha Gaussa**, podaje związek między liczbami pierwszymi Fermata a wielokątami foremnymi.

> Za pomocą cyrkla i linijki można skonstruować n-kąt foremny wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest: potęgą dwójki lub liczbą pierwszą Fermata pomnożoną przez 2^k, lub iloczynem różnych liczb pierwszych Fermata i liczby 2^k, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną.

W tabeli obok podano liczby naturalne mniejsze od 100, dla których można skonstruować n-kąt foremny.

$3 = 3$	$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
$4 = 2^2$	$32 = 2^5$
$5 = 5$	$34 = 2 \cdot 17$
$6 = 2 \cdot 3$	$40 = 2^3 \cdot 5$
$8 = 2^3$	$48 = 2^4 \cdot 3$
$10 = 2 \cdot 5$	$51 = 3 \cdot 17$
$12 = 2^2 \cdot 3$	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
$15 = 3 \cdot 5$	$64 = 2^6$
$16 = 2^4$	$68 = 2^2 \cdot 17$
$17 = 17$	$80 = 2^4 \cdot 5$
$20 = 2^2 \cdot 5$	$85 = 5 \cdot 17$
$24 = 2^3 \cdot 3$	$96 = 2^5 \cdot 3$

3. Sprawdź, czy jest możliwe skonstruowanie za pomocą cyrkla i linijki n-kąta foremnego, gdy n równe jest: 170, 200, 204, 1020.

4. Znajdź informacje dotyczące konstrukcji 17-kąta foremnego (możliwość takiej konstrukcji wykazał C.F. Gauss w 1796 r.).

Odpowiedzi do zadań

3. $170 = 2 \cdot 5 \cdot 17$, jest
$200 = 2^3 \cdot 5^2$, nie jest
$204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$, jest
$1020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$, jest

4. Carl Friedrich Gauss przywiązywał dużą wagę do znalezionego przez siebie dowodu na to, że konstrukcja 17-kąta foremnego jest możliwa. W swojej ostatniej woli przekazał, aby na jego grobie nie było żadnych napisów, tylko wyryty w kamieniu 17-kąt foremny. Ostatecznie napisy umieszczono, ale nie zapomniano też o 17-kącie. Jego kształt ma obelisk stojący na grobie. (Źródło: Marek Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994)

Poniższa konstrukcja 17-kąta foremnego została przedstawiona już po śmierci Gaussa.

1. Rysujemy okrąg o środku w punkcie O.
2. Rysujemy średnicę AB.
3. Konstruujemy symetralną do średnicy AB. Symetralna ta przecina okrąg w punktach C_1 i C_2.
4. Wyznaczamy na odcinku OC_1 taki punkt D, że: $|OD| = \frac{1}{4}|OC_1|$
5. Rysujemy prostą DB.
6. Wyznaczamy na odcinku OB taki punkt E, że: $\sphericalangle ODE = \frac{1}{4} \sphericalangle ODB$
7. Wyznaczamy na odcinku AO taki punkt F, że: $\sphericalangle FDE = 45°$
8. Rysujemy okrąg o średnicy FB. Punkt przecięcia tego okręgu z odcinkiem OC_1 oznaczamy przez G.
9. Rysujemy okrąg o środku w punkcie E i promieniu $|EG|$. Punkty przecięcia tego okręgu ze średnicą AB oznaczamy przez M i N.
10. Rysujemy proste prostopadłe do średnicy AB w punktach M i N. Punkty przecięcia tych prostych z łukiem AC_1B oznaczamy odpowiednio przez W_1 i W_3.
11. Punkty W_1 i W_3 są odpowiednio pierwszym i trzecim wierzchołkiem 17-kąta foremnego.
12. Konstruujemy dwusieczną kąta W_1OW_3. Przecięcie dwusiecznej z wyjściowym okręgiem wyznacza wierzchołek W_2.
13. Wyznaczamy pozostałe wierzchołki 17-kąta foremnego poprzez odłożenie na okręgu odcinka W_1W_2.



Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Jaka jest największa liczba trzycyfrowa podzielna przez:

a) 5, b) 6, c) 7, d) 15?

2. Wyznacz liczbę przeciwną do podanej liczby.

a) $23 : \left(-7\frac{2}{3}\right) - \frac{324}{243}$

b) $\left(-2\frac{3}{5}\right) \cdot 3\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

c) $\left(-6\frac{2}{3}\right) : \left(-7\frac{1}{7}\right) - \sqrt{\frac{169}{225}}$

d) $-12 \cdot 3\frac{7}{15} + 3\frac{1}{2} : 5$

e) $3\frac{3}{4} : \frac{3}{10} - \left(-1\frac{1}{6}\right) : \frac{7}{5}$

f) $4\frac{3}{4} : \left(\frac{3}{4} - 2\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}$

3. Wyznacz liczbę o 20% mniejszą od podanej liczby.

a) $\dfrac{\left(3\frac{1}{4} - 1{,}5\right) \cdot \left(-2\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right)}{\left(2{,}25 - 3\frac{1}{2}\right) : \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}$

b) $\dfrac{\left(1\frac{1}{6} - \frac{7}{9}\right) : \left(1\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right) \cdot 0{,}35 - 1\frac{2}{3} : \left(-2\frac{1}{2}\right)}$

c) $\dfrac{-48 : 0{,}6 + 1\frac{2}{3} \cdot 45 - 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}}{1\frac{1}{3} \cdot \left(-2\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - 5\frac{1}{5}\right) \cdot 0{,}5}$

d) $\dfrac{0{,}3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) : 0{,}75}{\left(\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3}\right) \cdot (-0{,}8) + 1{,}44 : 2\frac{2}{5}}$

4. Wśród poniższych liczb wskaż liczbę niewymierną i podaj największą liczbę całkowitą od niej mniejszą.

a) $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}$, $14 - \sqrt{196}$, $2\sqrt{16} - \sqrt{36}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$, $\sqrt{1\frac{4}{25}}$, $\sqrt{12} \cdot \sqrt{75}$

c) $\frac{\sqrt{49}}{3} + \frac{\sqrt[3]{729}}{4}$, $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}$

d) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$, $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$

5. Wyznacz liczbę odwrotną do podanej liczby.

a) $\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{15}$

b) $\sqrt{5\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$

c) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{40}$

d) $\sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{45}$

e) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{512}}$

f) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{192}}$

g) $\sqrt{1\frac{9}{16}} : \sqrt{\frac{225}{256}}$

h) $\sqrt{1\frac{1}{2}} : \sqrt{1\frac{5}{27}}$

6. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{\frac{(-2)^3}{125}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{(-2)^6}{(-3)^3}}$

c) $\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt[3]{\frac{125}{64}}$

d) $\frac{\sqrt{121} - \sqrt[3]{125}}{\sqrt{144} - \sqrt[3]{216}}$

e) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{15}} \cdot \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$

f) $\sqrt[3]{2\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{20}}$

g) $\sqrt[3]{0{,}8} : \sqrt[3]{1\frac{9}{16}}$

h) $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{1{,}44}$

7. a) Oblicz iloraz sumy liczb $x = 2 - \sqrt{5}$ i $y = 4 - \sqrt{5}$ przez ich różnicę.

b) Oblicz sześcian różnicy liczb $x = 1 - 6\sqrt[3]{3}$ i $y = 0{,}(9) - \sqrt[3]{3}$.

c) Oblicz różnicę odwrotności kwadratów liczb $x = \frac{\sqrt{2}}{9}$ i $y = 0{,}(2) \cdot \sqrt{3}$.

Odpowiedzi do zadań

1. **a)** 995 **b)** 996 **c)** 994 **d)** 990

2. **a)** $4\frac{1}{3}$ **b)** 8 **c)** $-\frac{1}{15}$ **d)** 40,9 **e)** $-13\frac{1}{3}$ **f)** $3\frac{1}{2}$

3. **a)** $0{,}8 \cdot 1\frac{7}{8} = 1\frac{1}{2}$ **b)** $0{,}8 \cdot \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ **c)** $0{,}8 \cdot \frac{6}{5} = \frac{24}{25}$ **d)** $0{,}8 \cdot \frac{55}{64} = \frac{11}{16}$

4. **a)** $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}$, 2 **b)** $\sqrt{1\frac{4}{25}}$, 1 **c)** $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}$, 13 **d)** $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$, 8

5. **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{2}{7}$ **c)** $\frac{1}{10}$ **d)** $\frac{1}{15}$ **e)** 2 **f)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **g)** $\frac{3}{4}$ **h)** $\frac{8}{9}$

6. **a)** $-\frac{2}{5}$ **b)** $-1\frac{1}{3}$ **c)** 0 **d)** 1 **e)** $\frac{2}{3}$ **f)** $\frac{1}{2}$ **g)** $\frac{4}{5}$ **h)** $\frac{5}{6}$

7. **a)** $-3 + \sqrt{5}$ **b)** -375 **c)** $\frac{135}{4}$



8. Podaj liczbę naturalną n spełniającą nierówności:

a) $n < 2\sqrt{3} < n+1$, b) $n-1 < 5\sqrt{5} < n$, c) $n < \sqrt{35} < n+1$.

9. Oblicz. Wynik podaj w notacji wykładniczej.

a) $\frac{7{,}2\cdot 10^{18}\cdot 4{,}9\cdot 10^{7}}{5{,}6\cdot 10^{32}}$ c) $4\,410\,000\,000 : 0{,}021$ e) $0{,}000\,000\,216 : 360\,000$

b) $\frac{1{,}44\cdot 10^{11}\cdot 5{,}4\cdot 10^{23}}{1{,}8\cdot 10^{5}\cdot 3{,}6\cdot 10^{8}}$ d) $10\,240 : 0{,}000\,000\,08$ f) $0{,}000\,000\,000\,08 : 2{,}5$

10. Uporządkuj liczby a, b, c i d w kolejności rosnącej.

a) $a = \log_2 64$, $b = \log_3 81$, $c = \log_4 1024$, $d = \log_5 125$

b) $a = \log_2 2\sqrt{2}$, $b = \log_3 9\sqrt[3]{3}$, $c = \log_4 32$, $d = \log_5 0{,}04$

11. O ile procent zmieniło się pole prostokąta, jeśli:

a) oba boki skrócono o 20%,

b) jeden bok skrócono o 10%, a drugi wydłużono o 10%?

12. Liczba członków pewnego klubu golfowego wzrastała przez ostatnie trzy lata o 20% rocznie. Ilu członków liczył ten klub trzy lata temu, jeśli rok temu należało do niego 216 osób?

13. Kwotę 3000 zł wpłacono do banku A na lokatę oprocentowaną p% w skali roku. Kwotę 4000 zł wpłacono do banku B, w którym oprocentowanie jest o 2 punkty procentowe wyższe. Po roku odsetki uzyskane łącznie w obu bankach wyniosły 360 zł. Oblicz p.

14. Wyznacz liczbę: a) o 2‰ większą od 100, b) o 1,6‰ większą od 500.

Zestaw II

1. Która z liczb: a, b, c, d, e ma najwięcej, a która najmniej dzielników?

$a = 12$ $b = 50$ $c = 60$ $d = 110$ $e = 123$

2. Oblicz.

a) $\frac{4^{-6}\cdot 4^{5}}{4^{-2}}$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-6}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\cdot\frac{9^4}{8^3}$ e) $2^{-5}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4}\cdot\left(\sqrt{8}\right)^{6}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\cdot\frac{3^{-3}}{3^2}$ d) $10^4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\cdot\left(5^5\right)^{-1}$ f) $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{8}}{\left(\sqrt{27}\right)^{-2}}\cdot\left(3^4 : 3^{-2}\right)^{-2}$

D **3.** Uzasadnij, że nierówność zachodzi dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

a) $\sqrt[3]{\frac{125x^6}{64}} - \sqrt{\frac{9x^4}{8}} \geqslant 0$ b) $\sqrt[3]{\frac{64x^{12}}{27}} - \sqrt{0{,}01x^8} \geqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}x^4$

3. a) $\sqrt[3]{\frac{125x^6}{64}} - \sqrt{\frac{9x^4}{8}} = \frac{5x^2}{4} - \frac{3x^2}{2\sqrt{2}} = \frac{5x^2}{4} - \frac{3\sqrt{2}x^2}{4} = \left(5-3\sqrt{2}\right)\frac{x^2}{4} \geqslant 0$, ponieważ $5 - 3\sqrt{2} = \sqrt{25} - \sqrt{18} > 0$.

b) $\mathrm{L} = \sqrt[3]{\frac{64x^{12}}{27}} - \sqrt{0{,}01x^8} = \frac{4x^4}{3} - \frac{x^4}{10} = \frac{37}{30}x^4$

$\mathrm{P} = \frac{2\sqrt{3}x^4}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{30}x^4$

Zatem $\mathrm{L} \geqslant \mathrm{P}$, ponieważ: $37 = \sqrt{1369} > \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$.

8. a) 3 **b)** 12 **c)** 5

9. a) $6{,}3\cdot 10^{-7}$ **b)** $1{,}2\cdot 10^{21}$ **c)** $2{,}1\cdot 10^{11}$ **d)** $1{,}28\cdot 10^{11}$ **e)** $6\cdot 10^{-13}$ **f)** $3{,}2\cdot 10^{-11}$

10. a) $a = 6$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 3$
$d < b < c < a$
b) $a = 1\frac{1}{2}$, $b = 2\frac{1}{3}$, $c = 2\frac{1}{2}$, $d = -2$
$d < a < b < c$

11. a) Zmniejszyło się o 36%.
b) Zmniejszyło się o 1%.

12. Niech x – liczba członków klubu 3 lata temu, wówczas:
$1{,}2x$ – liczba członków 2 lata temu,
$1{,}2\cdot 1{,}2x = 1{,}44x$ – liczba członków rok temu.

$$1{,}44x = 216$$
$$x = 150$$

Trzy lata temu w klubie było 150 członków.

13. odsetki w banku A: $\frac{p}{100}\cdot 3000$
odsetki w banku B: $\frac{p+2}{100}\cdot 4000$

$$\frac{p}{100}\cdot 3000 + \frac{p+2}{100}\cdot 4000 = 360$$
$$p = 4$$

Oprocentowanie w banku A wynosiło 4%.

14. a) 100,2 **b)** 500,8

Zestaw II

1. Najwięcej dzielników ma liczba c, a najmniej liczba e.

2. a) 4 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $2\frac{17}{32}$ **d)** $6\frac{1}{4}$ **e)** 64 **f)** $\frac{1}{243}$

4. Liczby $x = 0{,}8(3)$ i $y = 1{,}(3)$ zapisz jako ułamki zwykłe i oblicz:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, b) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$, c) $\frac{1}{x} + y^2$, d) $x^2 - \frac{1}{y^2}$.

5. Podaj potrzebne założenia i uprość wyrażenie.

a) $\frac{x^5 \cdot x^{-7}}{(x^2)^3}$ b) $\left(\frac{-6y^0 \cdot y^{-1}}{y^{-3}}\right)^2$ c) $\left(\frac{3z^2}{y^{-3}}\right)^2 - \frac{z^3y^4}{z^{-1}y^{-2}}$ d) $\frac{s^2t - t^3}{\frac{1}{s^{-2}} - \frac{1}{t^{-2}}}$

6. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(5x^2y^2)^3 : (25x^8y^4)$ dla $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{8}$,

b) $(8x^{-3}y)^3 : (4x^{-4}y^2)^3$ dla $x = \sqrt[3]{12}$, $y = 4\sqrt{3}$,

c) $\frac{(x^2y^3)^2 \cdot (-3x^3y^2)^3}{(-xy^2)^5}$ dla $x = \sqrt{3}$, $y = \frac{1}{9}$,

d) $\frac{(x^2y^{-1})^{-2}(-xy^{-2})^2}{(x^3y^4)^{-1}}$ dla $x = \sqrt[4]{2}$, $y = \sqrt[8]{8}$.

7. Oblicz $u + v + w$. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $u = \frac{14m^2t - 35mt + 28mt^2}{7mt}$, $v = \frac{9m^2t^2 - 21m^2t}{3m^2t}$, $w = \frac{m^2t^2 + 0{,}5mt^3}{-2mt^2}$

b) $u = \frac{64x^4y^2 - 60x^3y^2}{-4x^3y^2}$, $v = \frac{60xy^3 - 85x^2y^3}{5xy^3}$, $w = \frac{11x^3y + 3x^2y}{-x^2y}$

8. Oblicz.

a) $\frac{18^{\frac{2}{5}}}{6^{\frac{7}{5}} \cdot 9^{\frac{1}{5}}}$ b) $\frac{12^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{2}{3}}}{6^{\frac{4}{3}}}$ c) $\frac{14^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}$ d) $\frac{20^{1,2} \cdot 24^{0,3}}{6^{1,3} \cdot 250^{0,1}}$

D **9.** Uzasadnij, że prawdziwa jest równość:

a) $\log_2 20 + \log_2 1{,}6 = 10\log_2 \sqrt{2}$,
c) $\log_2 48 - \log_2 6 = \log_4 64$,
b) $\log_3 36 + \log_3 81 = 6 + \log_3 4$,
d) $\log_3 72 - \log_3 4 = 2 + \log_3 2$.

D **10.** Liczba k jest sumą pięciu kolejnych liczb nieparzystych. Uzasadnij, że $\frac{k}{5}$ jest liczbą całkowitą.

11. Największy wspólny dzielnik liczby x i liczby 48 jest równy 8. Ile może być równa liczba x, jeśli wiadomo, że jest dwucyfrowa?

D **12.** Uzasadnij, że jeśli jeden bok prostokąta ma długość równą 1, a drugi – równą n, gdzie n jest liczbą naturalną, to długość przekątnej tego prostokąta jest liczbą niewymierną.

D **13.** Uzasadnij, że dla dwóch kolejnych liczb całkowitych m i $m + 1$ można wskazać liczbę niewymierną c taką, że $m < c < m + 1$.

4. $x = \frac{5}{6}$, $y = \frac{4}{3}$
a) $1\frac{19}{20}$ **b)** $2\frac{1}{400}$ **c)** $2\frac{44}{45}$ **d)** $\frac{19}{144}$

5. a) x^{-8}, $x \neq 0$ **b)** $36y^4$, $y \neq 0$
c) $8z^4y^6$, $y \neq 0$, $z \neq 0$
d) t, $s \neq 0$, $t \neq 0$, $s \neq t$, $s \neq -t$

6. a) 20 **b)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **c)** 27 **d)** 2

7. a) $1\frac{1}{2}m + 6\frac{3}{4}t - 12$, $m \neq 0$, $t \neq 0$
b) $-44x + 24$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

8. a) $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{4}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ **d)** $\frac{20}{3}$

10. Rozważmy pięć kolejnych liczb nieparzystych: $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$, $2n + 7$, $2n + 9$.
Wówczas:
$k = 2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 + 2n + 7 + 2n + 9 = 10n + 25 = 5(2n + 5)$
Zatem jest to liczba podzielna przez 5, co oznacza, że $\frac{k}{5}$ jest liczbą całkowitą.

11. $x = 40$ lub $x = 56$ lub $x = 88$

13. Niech $c = \frac{\sqrt{2}}{2} + m$. Wówczas:
$m < \frac{\sqrt{2}}{2} + m < m + 1$,
bo $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$
Zatem między dowolnymi dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi znajduje się liczba niewymierna.

9. a) $\log_2 20 + \log_2 1{,}6 = \log_2(20 \cdot 1{,}6) = \log_2 32 = \log_2 2^5 = \log_2 \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} = 10\log_2 \sqrt{2}$
b) $\log_3 36 + \log_3 81 = \log_3(36 \cdot 81) = \log_3(4 \cdot 9 \cdot 81) = \log_3\left(4 \cdot 3^2 \cdot 3^4\right) = \log_3\left(3^6 \cdot 4\right) = \log_3 3^6 + \log_3 4 = 6 + \log_3 4$
c) $\log_2 48 - \log_2 6 = \log_2(48 : 6) = \log_2 8 = 3 = \log_4 64$
d) $\log_3 72 - \log_3 4 = \log_3(72 : 4) = \log_3 18 = \log_3(9 \cdot 2) = \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$

12. Niech d oznacza długość przekątnej.
Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $d^2 = n^2 + 1$. Zatem: $d = \sqrt{n^2 + 1}$.
Liczba $n^2 + 1$ nie jest kwadratem liczby naturalnej, bo różnica między kwadratami kolejnych liczb naturalnych dodatnich jest większa od 1 (liczby n^2 i $n^2 + 1$ są kolejnymi liczbami naturalnymi dodatnimi).
Zatem liczba $\sqrt{n^2 + 1}$ jest niewymierna.



Przykład 1

Ile jest liczb dwucyfrowych dodatnich, których reszta z dzielenia przez 7 jest równa 3?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

- Liczb spełniających warunki zadania nie jest dużo, można je zatem wszystkie wypisać: 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94 – jest ich 13.
- Zauważmy, że najmniejszą liczbą dwucyfrową spełniającą podany warunek jest 10, a największą 94. Wszystkie te liczby można zapisać w postaci: $7n+3$, gdzie $1 \leqslant n \leqslant 13$, zatem jest 13 takich liczb.

Odpowiedź: 13

Przykład 2

Ile jest liczb czterocyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 3 i przez 5?

Zauważmy, że liczby podzielne przez 3 i przez 5 to liczby podzielne przez 15. Najmniejszą liczbą czterocyfrową podzielną przez 15 jest 1005, a największą 9990. Liczb spełniających warunki zadania jest zbyt dużo, by je wszystkie wypisać.

$$1005 = 67 \cdot 15,\ 1020 = 68 \cdot 15,\ 1035 = 69 \cdot 15,\ \ldots,\ 9990 = 666 \cdot 15$$

Każdą z tych liczb możemy zapisać w postaci $15 \cdot n$, gdzie $67 \leqslant n \leqslant 666$. Zatem takich liczb jest $666 - 66 = 600$.

Odpowiedź: 600

Przykład 3

Ile jest liczb trzycyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 5 lub przez 6?

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 5: 100, 105, 110, …, 995. Najmniejszą z nich jest 100, a największą 995. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 5 można zapisać w postaci: $100 + 5n$, gdzie $0 \leqslant n \leqslant 179$, zatem takich liczb jest 180.

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 6: 102, 108, 114, …, 996. Najmniejszą z nich jest 102, a największą 996. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 6 można zapisać w postaci: $102 + 6n$, gdzie $0 \leqslant n \leqslant 149$, zatem takich liczb jest 150.

Zauważmy, że dwa razy zostały policzone liczby podzielne przez 30 (są one podzielne zarówno przez 5, jak i przez 6).

Liczby trzycyfrowe podzielne przez 30 można zapisać w postaci: $120 + 30n$, gdzie $0 \leqslant n \leqslant 29$, zatem takich liczb jest 30.

Liczb podzielnych przez 5 lub przez 6 jest: $180 + 150 - 30 = 300$.

Odpowiedź: 300



Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Liczba a jest ujemna, gdy:

A. $a = \frac{13}{5} - 2{,}(5)$, **C.** $a = 1{,}(9) - \sqrt{3}$,
B. $a = \sqrt{2} - 1{,}(4)$, **D.** $a = \frac{2}{3} - 0{,}(6)$.

2. Jeśli reszta z dzielenia liczby m przez 6 jest równa 4, a reszta z dzielenia liczby n przez 6 jest równa 5, to reszta z dzielenia liczby $m + n$ przez 6 jest równa:

A. 1, **B.** 3, **C.** 4, **D.** 5.

2. $m = 6x + 4$ oraz $n = 6y + 5$, gdzie $x, y \in \mathbf{Z}$
$m + n =$
$= (6x + 4) + (6y + 5) =$
$= 6(x + y + 1) + 3$
Zatem reszta z dzielenia sumy $m + n$ przez 6 jest równa 3.

3. Wśród liczb: $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$, $\sqrt[5]{243}$, $\sqrt[6]{64}$ jest n liczb niewymiernych, zatem:

A. $n = 0$, **B.** $n = 1$, **C.** $n = 2$, **D.** $n = 3$.

3. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt[5]{243} = 3$,
$\sqrt[6]{64} = 2$

4. Która z poniższych liczb jest równa 24?

A. $12 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 2^{\frac{3}{4}}$ **B.** $8 \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$ **C.** $6 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ **D.** $3 \cdot \sqrt{6} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$

5. Liczba $\frac{(1{,}4 \cdot 10^{6}) \cdot (5{,}4 \cdot 10^{-8})}{(3{,}6 \cdot 10^{-3}) \cdot (3{,}5 \cdot 10^{-4})}$ jest k-krotnie większa od liczby 3000 dla:

A. $k = 2$, **B.** $k = 6$, **C.** $k = 10$, **D.** $k = 20$.

5. $\frac{(1{,}4 \cdot 10^{6}) \cdot (5{,}4 \cdot 10^{-8})}{(3{,}6 \cdot 10^{-3}) \cdot (3{,}5 \cdot 10^{-4})} =$
$= 0{,}6 \cdot 10^{5} = 60\,000 =$
$= 20 \cdot 3000$

6. Dane są liczby $a = -12$, $b = -2\sqrt{38}$ oraz $x = \frac{\sqrt{3}-3}{3}$, $y = \frac{\sqrt{2}-2}{2}$. Prawdziwe są nierówności:

A. $a < b$ i $x < y$, **C.** $a > b$ i $x < y$,
B. $a < b$ i $x > y$, **D.** $a > b$ i $x > y$.

7. Prawdziwa jest równość:

A. $\log_8 32 + \log_4 16 = 2\frac{1}{2}$, **C.** $\log_8 64 + \log_4 32 = 4\frac{1}{2}$,
B. $\log_8 16 + \log_4 32 = 3\frac{1}{2}$, **D.** $\log_8 64 + \log_4 64 = 5\frac{1}{2}$.

8. Cena towaru nie uległa zmianie, jeśli:

A. obniżono ją o 10%, a nową cenę podniesiono o 10%,
B. podniesiono ją o 30%, a nową cenę obniżono o 30%,
C. obniżono ją o 20%, a nową cenę podniesiono o 25%,
D. podniesiono ją o 20%, a nową cenę obniżono o 25%.

9. Jeśli 20% liczby 55 jest o 4 mniejsze od 30% liczby x, to:

A. $x = 75$, **B.** $x = 50$, **C.** $x = 45$, **D.** $x = 33$.



Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Ile jest dodatnich liczb dwucyfrowych, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 2?

Zadanie 2 (2 pkt)
Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości $2\sqrt{27}$ i $4\sqrt{12}$.

Zadanie 3 (2 pkt)
Oblicz $3x - y$, jeśli wiadomo, że $\left(\sqrt{5}\right)^x = 125\sqrt{5}$ oraz $\left(\sqrt{2}\right)^y = 1024$.

Zadanie 4 (2 pkt)
Cenę towaru obniżono o 60%, a następnie podniesiono o $p\%$. Wyznacz p, jeśli w ten sposób otrzymano cenę sprzed obniżki.

Zadanie 5 (2 pkt)
Cena brutto kurtki zimowej wynosi 307,50 zł. Na cenę tę składa się cena netto oraz 23% podatku VAT. O ile zmniejszy się cena netto tej kurtki, jeśli po obniżce ceny podatek VAT będzie wynosił 51,75 zł?

D **Zadanie 6 (2 pkt)**
Dane są liczby $x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-4}$ i $y = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$. Uzasadnij, że $x < y$.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 7 (4 pkt)
Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 4 lub przez 5?

Zadanie 8 (4 pkt)
O ile procent liczba x jest większa od liczby y, jeżeli $x = \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right) : \left(\frac{11}{20} - 0{,}2\right)$, $y = (0{,}5 \cdot 3)^{-2} \cdot 2^3 \cdot 3^{-1}$?

Zadanie 9 (4 pkt)
Woda płynąca z kranów: A, B i C może napełnić basen w ciągu 4 godzin. W ciągu godziny woda płynąca tylko z kranu A napełnia $\frac{1}{10}$ basenu, a tylko z kranu B – $\frac{1}{12}$ basenu. Ile czasu trwałoby napełnianie basenu wodą płynącą tylko z kranu C?

D **Zadanie 10 (4 pkt)**
Uzasadnij, że jeśli $a = 45$, $b = (2 - \sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5})$ i $c = (-2 + \sqrt{5})(11 + 2\sqrt{5})$, to liczba $\frac{\sqrt{a}}{b+c}$ jest liczbą wymierną.

1. 15

2. Przyprostokątne: $6\sqrt{3}$, $8\sqrt{3}$, przeciwprostokątna: $10\sqrt{3}$, obwód: $24\sqrt{3}$.

3. $x = 7$, $y = 20$; $3x - y = 1$

4. Niech c – cena wyjściowa. Wówczas: $0{,}4 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) c = c$. Zatem $p = 150$.

5. Cena netto:
$$307{,}50 : 1{,}23 = 250 \text{ [zł]}$$
Cena netto po obniżce:
$$51{,}75 : 0{,}23 = 225 \text{ [zł]}$$
$250 - 225 = 25$ [zł]

6. $x = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$,
$y = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2^1 = 2$
Zatem $x < y$.

7. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 4 możemy zapisać w postaci $4n$, gdzie n jest liczbą naturalną oraz $25 \leqslant n \leqslant 249$. Zatem jest 225 takich liczb.
Liczby trzycyfrowe podzielne przez 5 możemy zapisać w postaci $5n$, gdzie n jest liczbą naturalną oraz $20 \leqslant n \leqslant 199$. Zatem jest 180 takich liczb.
Liczby trzycyfrowe podzielne jednocześnie przez 4 i 5 możemy zapisać w postaci $20n$, gdzie n jest liczbą naturalną oraz $5 \leqslant n \leqslant 49$. Zatem jest 45 takich liczb.
Liczb trzycyfrowych podzielnych przez 4 lub przez 5 jest: $225 + 180 - 45 = 360$.

8. $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{32}{27}$
I sposób: $\frac{\frac{4}{3} - \frac{32}{27}}{\frac{32}{27}} = 0{,}125$
Liczba x jest o 12,5% większa od liczby y.
II sposób:
$x = \frac{4}{3} = \frac{9}{8} \cdot \frac{32}{27} = \frac{9}{8}y = 1{,}125y$, zatem liczba x jest o 12,5% większa od liczby y.

9. Oznaczmy przez b objętość wody w pełnym basenie, a przez x – liczbę godzin potrzebnych do napełnienia basenu wodą z kranu C. Wówczas ilość wody wlanej do basenu w ciągu jednej godziny:
– z kranu A jest równa $\frac{1}{10}b$,
– z kranu B jest równa $\frac{1}{12}b$,
– z kranu C jest równa $\frac{1}{x}b$.
Zatem:
$$\frac{b}{10} + \frac{b}{12} + \frac{b}{x} = \frac{b}{4}$$
$$\frac{1}{x} = \frac{15}{60} - \frac{6}{60} - \frac{5}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$
$$x = 15 \text{ h}$$
Czyli napełnienie basenu wodą tylko z kranu C trwałoby 15 h.

10. $b = 12 - 5\sqrt{5}$, $c = 7\sqrt{5} - 12$, $b + c = 2\sqrt{5}$
$\frac{\sqrt{a}}{b+c} = \frac{\sqrt{45}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$ zatem jest to liczba wymierna.

W zadaniach 1–4 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)

Dane są liczby $a = 3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$, $b = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$ i $c = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2$. Liczba x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb a i b, a liczba y – najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb a i c. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku ilorazu $\frac{y}{x}$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x^{-1}y^4 \cdot (x^{-1}y)^3}{(x^2y^{-1})^{-1}x^2y^2}$ dla $x = \sqrt[3]{4}$ i $y = \sqrt[6]{2}$. Wynik zapisz w postaci dziesiętnej i zakoduj jego trzy pierwsze cyfry po przecinku.

Zadanie 3 (2 pkt)

Liczbę 1,(54) zapisz jako ułamek nieskracalny $\frac{m}{n}$. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności liczby $m \cdot n$.

Zadanie 4 (2 pkt)

Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\log_2 \sqrt[3]{2} + \log_4 \sqrt[4]{8}$.

D **Zadanie 5 (3 pkt)**

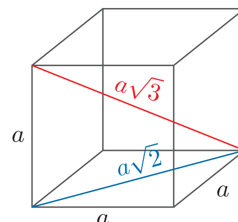
Uzasadnij, że iloczyn pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 120.

D **Zadanie 6 (3 pkt)**

Uzasadnij, że liczba $7^{11} \cdot 11^7$ ma 96 różnych dzielników.

D **Zadanie 7 (3 pkt)**

Przekątna sześcianu o krawędzi a ma długość $a\sqrt{3}$, a przekątna jego podstawy ma długość $a\sqrt{2}$. Uzasadnij, że jeśli długość przekątnej sześcianu jest liczbą wymierną, to długość przekątnej podstawy jest liczbą niewymierną.



D **Zadanie 8 (3 pkt)**

Logarytmy o podstawie 3 liczb a, b i c są kolejnymi liczbami naturalnymi. Uzasadnij, że liczba $a + b + c$ jest podzielna przez 13.

D **Zadanie 9 (3 pkt)**

Uzasadnij, że jeśli $a\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną różną od 0, to a jest liczbą niewymierną.

Odpowiedzi do zadań

1. $x = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13$, $y = 3 \cdot 5^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2$
$\frac{y}{x} = \frac{3 \cdot 5^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2}{3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13} = \frac{13}{3 \cdot 7} = \frac{13}{21} \approx 0{,}619$
Należy zakodować: 061
2. Wyrażenie upraszczamy:
$\left(\frac{y}{x}\right)^4 = \left(\frac{2^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^4 = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^4 = 2^{-2} = 0{,}25$
Należy zakodować: 250
3. $1{,}(54) = \frac{17}{11}$, $m \cdot n = 187$
Należy zakodować: 187
4. $\sqrt[4]{8} = 2^{\frac{3}{4}} = \left(2^2\right)^{\frac{3}{8}} = (4)^{\frac{3}{8}}$
$\log_2 \sqrt[3]{2} + \log_4 \sqrt[4]{8} = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{17}{24} = 0{,}708(3)$
Należy zakodować: 708
5. $120 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, czyli liczba jest podzielna przez 120, jeżeli jest podzielna jednocześnie przez: 3, 5 i 8.
Wśród pięciu kolejnych liczb naturalnych:
– dokładnie jedna jest podzielna przez 5,
– co najmniej jedna jest podzielna przez 3,
– co najmniej dwie są podzielne przez 2, przy czym jedna z nich jest podzielna przez 4.
Zatem iloczyn tych liczb jest podzielny przez 120.
6. Dzielnikiem liczby $7^{11} \cdot 11^7$ jest liczba postaci $7^x \cdot 11^y$, gdzie x i y są liczbami naturalnymi oraz $0 \leqslant x \leqslant 11$ i $0 \leqslant y \leqslant 7$. Liczba x jest jedną z dwunastu liczb, a y – jedną z ośmiu. Zatem $7^{11} \cdot 11^7$ ma $12 \cdot 8 = 96$ różnych dzielników.
7. Długość $a\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną, czyli liczbę a możemy zapisać w postaci $a = m\sqrt{3}$, gdzie m jest liczbą wymierną. Zatem liczba:
$$a\sqrt{2} = m\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = m\sqrt{6}$$
jest niewymierna, ponieważ iloczyn liczby wymiernej różnej od 0 i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.
8. Rozważmy trzy kolejne liczby naturalne: $n = \log_3 a$, $n + 1 = \log_3 b$, $n + 2 = \log_3 c$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Wówczas $a = 3^n$, $b = 3^{n+1}$, $c = 3^{n+2}$. Zatem:
$$a + b + c = 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 3^n + 3 \cdot 3^n + 9 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^n$$
czyli jest to liczba podzielna przez 13.
9. Liczba $a\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną różną od zera, czyli istnieje ułamek $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi różnymi od 0 takimi, że $a\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, czyli $2a^2 = \frac{m^2}{n^2}$. Stąd $2a^2 \cdot n^2 = m^2$, co oznacza, że przy rozkładzie na czynniki pierwsze liczba 2 występuje parzystą liczbę razy po stronie prawej. Zatem by równość była prawdziwa, liczba 2 musi również wystąpić parzystą liczbę razy po lewej stronie. Co oznacza, że a jest liczbą niewymierną.